a) (3 ptos.) Sea $a > 0$ un número real positivo. Demuestre que el conjunto

$$\sqrt{a}\mathbb{N} = \{\sqrt{a} \cdot n \,|\, n \in \mathbb{N}\},$$

es numerable.

Notemos $\{\sqrt{a}\, n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\, n\} =: B$ +0.3

luego $|\sqrt{a}\,\mathbb{N}| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\cdot n\}\right|$

como $\{\sqrt{a}\cdot n\}$ es finito $\forall n \in \mathbb{N}$, pues tiene un solo elemento (es un singleton)

tenemos $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\, n\}\right| \leq |\mathbb{N}|$ por ser unión numerable de conjuntos finitos. +1.2

Ahora para ver que $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\, n\}\right|$ es exactamente $\mathbb{N}$,

OPCIÓN 1: Basta notar que los singletons $\{\sqrt{a}\, n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos, y por lo tanto la unión numerable de ellos es numerable (y no finita) +1.5

OPCIÓN 2: Bastaría ver que el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\, n\}$ es infinito, o bien que $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\cdot n\}\right| \geq |\mathbb{N}|$

Para ello, notemos que la función $f : B \to \mathbb{N}$ definida por

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a}}$ está bien definida y es una inyección

sea $x \in B$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $x = \sqrt{a}\cdot m$, luego $f(x) = \dfrac{\sqrt{a}\cdot m}{\sqrt{a}} = m \in \mathbb{N}$
por lo que f está bien definida

+0.5

Ahora, sean $x_1, x_2 \in B$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$
luego $f(x_1) = f(x_2) \iff \dfrac{x_1}{\sqrt{a}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{a}}$ $\quad /\sqrt{a} \neq 0$

$\iff x_1 = x_2$

Así, como existe una inyección entre $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\cdot n\}$ y $\mathbb{N}$

$$|B| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sqrt{a}\cdot n\}\right| \leq |\mathbb{N}|$$ +1.0

Por lo tanto $|\sqrt{a}\,\mathbb{N}| = \left|\bigcup \{\sqrt{a}\cdot n\}\right| = |\mathbb{N}|$

■