Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-2 Álgebra Lineal
16 de mayo de 2024

Auxiliar 8: Matriz Representante

Profesor: Natacha Astromujoff A.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Javiera Gutierrez R.

Resumen

- [**Matriz Representante**]: Sea $T : U \to V$ lineal, y sean $\beta_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de U y V respectivamente, entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz $\mathcal{M}_{\beta_U\beta_V}(T)$ que se construye a través de los coeficientes obtenidos al expresar cada $T(u_i)$ como combinación lineal de los vectores de la base β_V, es decir;

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m \\ T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{\beta_U\beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- [**Matriz representante de la composición**]: Sea $T : U \to V$, $L : V \to W$ aplicaciones lineales, tales que β_U, β_V y β_W son bases de U, V y W respectivamente, entonces se tiene que:

$$\mathcal{M}_{\beta_U\beta_W}(L \circ T) = \mathcal{M}_{\beta_V\beta_W}(L)\mathcal{M}_{\beta_U\beta_V}(T)$$

Obs: Podemos notar que $T = id_V \circ T \circ id_U$, por lo que si nos piden encontrar la matriz representante de T con respecto a las bases $\bar{\beta}'$ y $\bar{\beta}''$ (de U y de V resp.), siempre podemos pasar por las bases canónicas $(\beta' y \beta'')$, de tal forma que

$$\mathcal{M}_{\bar{\beta}'\bar{\beta}''}(T) = \mathcal{M}_{\beta''\bar{\beta}''}(id_V)\mathcal{M}_{\beta\beta''}(T)\mathcal{M}_{\bar{\beta}'\beta'}(id_U)$$

$$\begin{array}{ccccc} & U, \bar{\beta}' & \xrightarrow{T} & V, \bar{\beta}'' & \\ id_U & \downarrow & & \uparrow & id_V \\ & U, \beta' & \xrightarrow{T} & V, \beta'' & \end{array}$$

P1. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definida por $T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0 + 2a_2) + a_1x + (2a_0 + a_2)x^2$

a) Demuestre que T es lineal.

b) Encuentre la matriz representante de T.

P2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ 2x+y-z \\ x-y+z-w \end{pmatrix}$$

Considere las siguientes bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Determine la matriz representante utilizando las bases canónicas

b) Determine la matriz representante usando las bases antes dada.

P3. Sean: $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una función lineal tal que:

$$\begin{aligned} T(1) &= 3 + 2x + 4x^2 \\ T(x) &= 2 + 2x^2 \\ T(x^2) &= 4 + 2x + 3x^2 \end{aligned}$$

Calcule la matriz representante $\mathcal{M}_{BB'}$ donde B es la base canónica y $B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.