Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-2 Álgebra Lineal
6 de junio de 2024

Auxiliar 11: Valores propios

Profesor: Natacha Astromujoff A.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Javiera Gutierrez R.

P1. Sea A una matriz perteneciente a $\mathcal{M}(\mathbb{R})_{nn}$. Demuestre lo siguiente.

a) Si $A^2 = A$ entonces sus unicos valores propios asociados a A pueden ser 0 y 1.

b) Si A es nilpotente todos sus valores propios son nulos.

c) Si A es invertible, entonces los recíprocos de los valores propios de A son valores propios de A^{-1}.

P2. Determine valores propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resumen

- **[Valores y Vectores Propios]**: Diremos que $x \in V$ es vector propio de $L : V \to V$ si:
  1. $x \neq 0$
  2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $L(x) = \lambda x$.
- **[Observación]**: De igual manera, dirims que $x \in V - \{0\}$ es vector propio de la matriz A, si es vector propio de la aplicación lineal $L(x) = Ax$, en donde:

  $$Ax = \lambda x$$

  De la misma manera decimos que λ es valor propio de A.
- **[Proposición]**: Dado $A \in \mathcal{M}_{nn}$, son equivalentes:
  1. $\exists x \neq 0$, $Ax = \lambda x$.
  2. $\exists x$ solución no trivial del sistema $(A - \lambda I)x = 0$.
  3. $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.
  4. $(A - \lambda I)$ no es invertible.
- **[Determinante]**: Definimos el determinante de una matriz A como:
  1. Si $A \in \mathcal{M}_{11}$, $|A| = a$, donde $A = a$.
  2. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}$, $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A^{i1}|$
- **[Propiedades]**:
  1. $|I| = 1$ donde I es la identidad.
  2. Si A es triangular superior entonces $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
  3. A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.
  4. $|AB| = |A||B|$
  5. $|A| = |A^t|$
- **[Polinomio Característico]**: Llamaremos polinomio característico de una matriz A a $P(\lambda) = |A - \lambda I|$.