p1) $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$

a) Si $A^2 = A$ sus únicos valores prop. son el 0 y el 1.

Notemos lo siguiente; Sabemos que

$$A v = \lambda \cdot v \quad / \cdot A$$
$$A \cdot A \cdot v = \lambda \cdot A \cdot v$$
$$A^2 \cdot v = \lambda \cdot A \cdot v$$
$$A \cdot v = \lambda \cdot (\lambda \cdot v)$$
$$\lambda v = \lambda^2 \cdot v$$
$$\lambda v - \lambda^2 v = 0$$
$$(\lambda - \lambda^2) v = 0 \mapsto \text{los vectores prop. son } \neq 0$$

$\therefore \ (\lambda - \lambda^2) = 0 \iff \lambda(1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ó $(1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ó $\lambda = 1$ ■

b) Si A es nilpotente sus v. prop son nulos

¿Qué es nilp? $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $A^k = 0$

Veamos que pasa con $A^k v$.

$k=1$

$$A v = \lambda v \mapsto \text{definición}$$

$k=2$

$$A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot \lambda v = \lambda \cdot A v = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v$$

$k=3$

$$A^3 \cdot v = A(A^2 \cdot v) = A(\lambda^2 \cdot v) = \lambda^2 \cdot (A \cdot v) = \lambda^2 \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^3 \cdot v$$

H.I $\longrightarrow$ Inducción.

$A^k \cdot v = \lambda^k \cdot v$

P.I pdq: $A^{k+1} v = \lambda^{k+1} \cdot v$

$$A^{k+1} \cdot v = A \cdot \underbrace{(A^k \cdot v)}_{\text{Hip. Induct.}} = A \cdot (\lambda^k \cdot v) = \lambda^k \cdot A \cdot v = \lambda^k \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{k+1} \cdot v$$

$\therefore$ tenemos que $\forall k$; $A^k \cdot v = \lambda^k \cdot v$

Como A es nilpotente tomemos el $\bar{k}$ tq $A^{\bar{k}} = 0$

por lo dem. anterior

$$\therefore \ A^{\bar{k}} \cdot v = \lambda^{\bar{k}} \cdot v$$
$$0 \cdot v = \lambda^{\bar{k}} \cdot v$$
$$0 = \lambda^{\bar{k}} \cdot v \longrightarrow \text{los vect. prop. son no nulos}$$

$\therefore \ \lambda^{\bar{k}} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

c) Si A es invertible, entonces los recíprocos de los valores prop. de A son valores prop. de A^{-1}.

Tenemos que: $\boxed{A \cdot v = \lambda v}$ $\mapsto$ Super definición

puedo aplicar la inversa a ambos lados:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \quad / A^{-1}$$
$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{} \cdot v = A^{-1} \cdot \lambda \cdot v$$
$$I \cdot v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v$$
$$v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v \quad / 1/\lambda$$
$$1/\lambda \cdot v = A^{-1} \cdot v.$$

$\therefore$ $1/\lambda$ son valores prop de A^{-1}

p2) Calculamos valores propios. Para ello calculamos:

$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow$ Buscamos estos λ

$\hookrightarrow$ es el determinante

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

el $\det\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (-1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - (2 \cdot 2)$

$$= -(1+\lambda)(1-\lambda) - 4$$
$$= -(1-\lambda^2) - 4$$
$$= \lambda^2 - 5$$

$\therefore$ $\lambda^2 - 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 5 \Rightarrow \lambda_1 = +\sqrt{5}, \ \lambda_2 = -\sqrt{5}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; $B - \lambda I = \begin{pmatrix} \overset{+}{1-\lambda} & \overset{-}{2} & \overset{+}{-1} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{-\lambda} & \overset{-}{1} \\ \overset{+}{4} & \overset{-}{-4} & \overset{+}{5-\lambda} \end{pmatrix}$

$\det(B - \lambda I) = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} + (-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$= -1 \cdot \left(2(5-\lambda) - (-1 \cdot -4)\right) + (-\lambda)\left((1-\lambda)(5-\lambda) - (4 \cdot -1)\right) - 1\left((1-\lambda)(-4) - (4 \cdot 2)\right)$$

$$= -1\,(10 - 2\lambda - 4) + (-\lambda)(5 - 6\lambda + \lambda^2 + 4) - 1\,(-4 + 4\lambda - 8)$$

$$= -1\,(6 - 2\lambda) + (-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) - 1\,(4\lambda - 12)$$
$$= 2\lambda - 6 - 4\lambda + 12 + (-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9)$$
$$= (6 - 2\lambda) + -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9)$$

$$= 2(3-\lambda) + -\lambda(\lambda-3)(\lambda-3)$$
$$= (\lambda-3)(-2 + -\lambda(\lambda-3))$$
$$= (\lambda-3)(-2 - \lambda^2 + 3\lambda)$$
$$= -(\lambda-3)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$
$$= -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$\therefore$ $\det(B-\lambda I) = 0 \Rightarrow -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \ \text{ó} \ \lambda_2 = 2 \ \text{ó} \ \lambda_3 = 1$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad (C-\lambda I) = \left.\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right\}$$

es una matriz triangular superior

$$\therefore \det(C-\lambda I) = \prod_{i=1}^{4} c_{ii}$$
$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

$\therefore \lambda = 2$ y $\lambda = 1$