# Pauta Auxiliar #6 Lineal

**P1** Tenemos el e.v: $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p'(1) = 0\}$

Esto es: si $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(1) = a + b + c + d = 0$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p'(1) = 3a + 2b + c = 0$

$\Rightarrow d = 2a + b$
$\quad c = -3a - 2b$

$$\Rightarrow (*) \boxed{p(x) = a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1)}$$

$\hookrightarrow$ Forma de los elementos de $U$.

a) Base y dim de $U$.

Tomando $(*)$ en cuenta, tenemos que

$\{\underbrace{x^3 - 3x + 2}_{\text{"}p_1\text{"}}, \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{"}p_2\text{"}}\}$ sí o sí es generador de $U$

Pues todo $p \in U$ se escribe como c.l. de $p_1$ y $p_2$.

Aparte son l.i. pues, sea $a, b \in \mathbb{R}$ t.q.

$a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow ax^3 = 0 \cdot x^3 \quad \wedge \quad b \cdot x^2 = 0 \cdot x^2$

(igualdad de polinomios)

$\Rightarrow a = b = 0$ // Luego $\dim(U) = 2$
Pues tenemos base de cardinal 2.

b) Idea: queremos escribir todo $p \in P_3(\mathbb{R})$ como c.l. de $p_1, p_2$, y otras cosas.

TIP: siempre se pueden usar bases canónicas para extender conjuntos l.i. a bases de un espacio completo.

Veremos que

$\{p_1, p_2, x, 1\}$ es una base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

Sea $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= ax^3 + bx^2 + cx + d - 3ax + 3ax + 2a - 2a - 2bx + 2bx + b - b$

$= a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1) + (c + 3a + 2b)x + (d - 2a - b) \cdot 1$

lo cual es la c.l. buscada. Así, vemos que $\{p_1, p_2, x, 1\}$ es un generador de cardinal 4 de un espacio de dimensión 4, luego, es una base*.

* Si esto no lo han visto, avísenme para subir demostración.

c) $W = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) : p''(0) = 0\}$

Veremos que si $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow p''(x) = 6ax + 2b$, luego, $p''(0) = 2b = 0$

$\Rightarrow b = 0$. Luego: $p(x) = ax^3 + cx + d$. $(*)$

, con lo que $\{x^3, x, 1\}$ son base de $W$

así, $\dim(W) = 3$.

↳ generan por $(*)$ y son l.i. pues son subconjunto de la base canónica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ y subconjunto de l.i. es l.i.

d) Sea $p \in U \cap W$. Veremos que:

$p(1) = p'(1) = 0 = p''(0)$

De lo visto en a) y c), esto es, que si $p \in U \cap W$:

y: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} d &= 2a + b \\ c &= -3a - 2b \\ b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} d &= 2a \\ c &= -3a \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Luego: $p(x) = ax^3 - 3ax + 2a = a(x^3 - 3x + 2)$

Así $\{x^3 - 3x + 2\}$ genera $U \cap W$, y es un singleton no cero, luego, es l.i., así, es base.

Con eso: $\dim(U \cap W) = 1$

e) Queremos escribir todo polinomio $p \in P_3(\mathbb{R})$, $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ como suma de un polinomio de $U$ y uno de $W$.

En efecto, basta notar:

$$p(x) = ax^3+bx^2+cx+d =$$
$$\left.\boxed{a(x^3-3x+2)+b(x^2-2x+1)}\right\} \in U$$
$$\left.\boxed{+\ x\cdot(c+3a+2b)+1\cdot(d-2a-b)}\right\} \in W.$$

lo cual nos da una primera descomposición.

f) Ya encontramos una escritura, ahora debemos encontrar $\tilde{u} \neq u$, $\tilde{w} \neq w$ tq $\tilde{u} + \tilde{w} = p$.

Consideramos otra forma de "desarmar" p:

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + bx^2 - 2bx + b + cx + d + 2bx - b$

$= \underbrace{b(x^2 - 2x + 1)}_{\in U} + \underbrace{ax^3 + (c+2b) \cdot x + (d-b) \cdot 1}_{\in W}$

Con lo que encontramos $\tilde{u} = b(x^2 - 2x + 1) \in U$
$\tilde{w} = ax^3 + (c+2b)x + (d-b) \in W$

tq $p = \tilde{u} + \tilde{w}$ y $\tilde{u} \neq u$
$\tilde{w} \neq w$.

Luego la escritura de p como elemento de $U+W$ no es única.

$\boxed{P2}$ $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \right\}$

Dado que

$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \\ \bullet \ |A| = 3 \\ \bullet \ \forall v \in A \quad v \neq 0 \end{array}\right\}$ Nos bastará que A sea l.i. para que sea base.

i.e buscamos los $k \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Esto es: los $k \in \mathbb{R}$ tq

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ k & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \text{ sólo tiene solución } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i.e, tiene sol. única).

Así basta analizar el sistema paramétrico.

$$\xrightarrow[E_{13}(-1,1)]{E_{12}(-k,1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-k,1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array}\right)$$

Con esto: el sist tiene sol única ssi $1-k^2 \neq 0$

i.e.

A es base $\forall k$ tq $k \notin \{-1, 1\}$.

P3

$$V = \left\{ M \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \{ M \in V \mid \text{Las filas de } M \text{ todas suman cero (por separado)} \}$$

a) Como fuéramos probar que algo es sev. de algo usamos caract compacta:

1.- $W \subseteq V$ directo de la def de $W$ (sólo toma elementos de $V$)

2.- $W \neq \phi$. En efecto $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

pues es triangular superior ($\in V$) y sus filas suman cada una cero.

3 - Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix}$

$M_1, M_2 \in W$.

PDQ $\lambda M_1 + M_2 \in W$. En efecto

$$\lambda M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda c_1 + c_2 \\ 0 & \lambda d_1 + d_2 & \lambda e_1 + e_2 \\ 0 & 0 & \lambda f_1 + f_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

y

suma de (1): $\lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2 + \lambda c_1 + c_2$

$$= \lambda \underbrace{(a_1 + b_1 + c_1)}_{\substack{1^a \text{ fila de } M_1 \\ \Rightarrow \text{ suma } 0 \\ \text{pues } M_1 \in W}} + \underbrace{(a_2 + b_2 + c_2)}_{\substack{1^a \text{ fila de } M_2 \\ \Rightarrow \text{ suma } 0 \text{ pues} \\ M_2 \in W}}$$

$\Rightarrow$ (1) suma cero.

y (2) y (3) son análogos. Con eso se prueba lo pedido.

b) Sea $M \in W$ $\quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ tenemos que:

$M \in W \Leftrightarrow c = -a-b \; ; \; e = -d \; ; \; f = 0.$

Con esto:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ 0 & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ES IMPORTANTE CHEQUEAR ESTO.

Con ello:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \; \underline{\underline{S}} \; W.$$

Es nuestro candidato a base. Ya vimos que genera. Veamos que es l.i.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} \underline{\lambda_1} & \underline{\lambda_2} & -\lambda_1-\lambda_2 \\ 0 & \underline{\lambda_3} & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & 0 \\ 0 & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De las componentes subrayadas se obtiene lo pedido.

Así $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

es base de $W$, y con ello, $\dim(W) = 3$