Pauta Aux #10 Lineal

P1) $B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculemos sus valores y vectores propios:

Recordemos que B será diagonalizable ssi $\forall \lambda$ valor propio de B:

$$\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & a & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(1-\lambda) - 0 \cdot 1]$

$- 0 \cdot \text{cosas} + 0 \cdot \text{cosas} = (2-\lambda)^2 \cdot (1-\lambda)$

$\Rightarrow$ Los valores propios son 2 y 1 con

$$[\alpha(2) = 2 \;,\; \alpha(1) = 1]$$

Veamos sus multiplicidades geométricas.

Para $\lambda = 2$: $B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que B sea diagonalizable, necesitamos que

$$\dim(\ker(B - 2I)) = 2 \quad (\text{i.e. } \gamma(2) = 2)$$

Esto, en términos del sistema matricial, corresponde a que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tenga 2 variables libres. esto es, $[a = 0]$

Ahora, chequeamos si con $a = 0$, $\gamma(1) = \alpha(1) = 1$

Vemos que $B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 \text{ libre} \\ x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{array}\right\} \underline{\gamma(1) = 1}$$

:)

Se cumple lo buscado

$\boxed{P2}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Buscamos valores y vectores propios:

$$B-\lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(B-\lambda I) = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 0\right]$$
$$- (-1)\cdot\left[(-1)\cdot(2-\lambda) - 0\right]$$
$$+ 0\cdot \text{COSAS}$$

$$= (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right]$$
$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\right] = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 3\right]$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) \Rightarrow$$ sus vp's son $\underline{1, 2, 3}$ todos con $\underline{a(\lambda) = 1}$

Veamos sus vectores propios:

$\lambda = 1$: $B - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Estudiemos su sistema homogeneo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \longrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$ es base del subespacio W_1.

$\lambda = 2$:

$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Veamos el sistema homogéneo.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ x_3 libre, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base del subespacio W_2.

Para $\lambda = 3$:

$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ estudiemos el sist. homogéneo.

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{matrix} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \longrightarrow -x_1 = x_2$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base del subespacio W_3

Notemos:

$\left.\begin{bmatrix} \cdot\ \alpha(1) = \gamma(1) = 1 \\ \cdot\ \alpha(2) = \gamma(2) = 1 \\ \cdot\ \alpha(3) = \gamma(3) = 1 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow$ <u>B diagonalizable.</u>

P3

a) A^2 si A diagonalizable:

$\exists D$ diagonal, P invertible tq $A = PDP^{-1}$

Busquemos los $\tilde{P}$ y $\tilde{D}$ tq $A^2 = \tilde{P}\tilde{D}\tilde{P}^{-1}$.

En efecto:

$A^2 = A \cdot A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$

como producto de diagonales es diagonal, entonces:

$$\tilde{P} = P \quad , \quad \tilde{D} = D^2$$

A su vez como $\tilde{D} = D^2$ contiene los valores propios de A^2, esto nos dice que al notar:

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2 \text{ son los vp's de } A^2.$$

b) A^T Misma lógica:

$A^T = (PDP^{-1})^T = (P^{-1})^T D P^T$

Luego: $\tilde{P} = (P^{-1})^T$, $\tilde{D} = D$

con ello los vp's de A^T son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (los vp's de A).

c) $A + I$. Misma lógica:

$A + I = PDP^{-1} + PIP^{-1} = P(D \cdot P^{-1} + I \cdot P^{-1})$

$P([D+I]P^{-1}) = P(D+I) \cdot P^{-1}$

Luego: si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los vp's de A

$\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1$ son los vp's de $A + I$.

P4 a) Queremos ver: (1) $1 \leq \gamma_A(\lambda_0)$
(2) $\alpha_A(\lambda_0) \leq n$.

(1) Sale de la def. de valor propio, pues

λ_0 valor propio $\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow v \in W_{\lambda_0} \Leftrightarrow \langle \{v\} \rangle \subseteq W_{\lambda_0}$

$\Leftrightarrow \dim(W_\lambda) \geq \dim(\langle \{v\} \rangle) = 1$. //

(2) Sale de que si A es de $n \times n$ entonces $P(\lambda)$ es de grado a lo más n.

(Se puede chequear con inducción)

Luego, cada cero aparece a lo más n veces

b) Considerando: $\gamma = \gamma(\lambda_0)$

$\beta_{\lambda_0} = \{v_1, \ldots, v_\gamma\}$ base de W_{λ_0}

y β extensión de β_{λ_0} a una base de $\mathbb{R}^n$.

$\beta = \{v_1, \ldots, v_\gamma, v_{\gamma+1}, \ldots, v_n\}$.

Encontremos $M_{\beta\beta}(T)$: (con $T(x) = Ax$).

Como recordaremos, esta matriz tiene la sgte forma:

$$M_{\beta\beta}(T) = \left([Tv_1]_\beta \,\middle|\, [Tv_2]_\beta \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, [Tv_n]_\beta \right)$$

Para los primeros "r" elementos de β.

Sabemos que $T(v_i) = \lambda_0 v_i$ pues $v_i \in W_{\lambda_0}$

y a su vez $[\lambda_0 v_i]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to$ posición "i".

Con ello:

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \lambda_0 & & & \\ 0 & & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & (\text{COSAS}) & \end{pmatrix}$$

c) Así: $\det(M_{\beta\beta}(T) - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^r \cdot (\text{COSAS})$

Es decir, λ_0 soluciona $P(\lambda)$ al menos "r" veces. $\longrightarrow \alpha_{M_{\beta\beta}}(\lambda_0) \geq \gamma_A(\lambda_0)$

¿Y esto qué tenía que ver con A?

Notemos que, recordando las ideas de cambio de base del C2:

$$M_{\beta\beta}(T) = Q \cdot A \cdot Q^{-1}$$

donde Q es la matriz de cambio de base de la base canónica a β.

Con ello $M_{\beta\beta}(T) \sim A$ (son similares)

Así, tienen los mismos valores propios y las multiplicidades coinciden.

Así $\alpha_{M_{\beta\beta}(T)}(\lambda_0) = \alpha_A(\lambda_0)$

y se concluye lo pedido.