Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-2 – Cálculo en Varias Variables

Guía de estudio 4

Temas: Regla de la Cadena, Derivadas de Orden Superior,
Ecuaciones en Derivadas Parciales

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

$\boxed{\textbf{P1}}$ Resuelva los siguientes problemas

(a) Sea $g(x,y) = e^{x+y}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(0) = (1,-1)$ y $f'(0) = (1,2)$, encontrar $F'(0)$ donde $t \mapsto F(t) = (g \circ f)(t)$.

(b) Sea $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x)$, $F(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, encontrar $g'(\pi)$ donde $t \mapsto g(t) = (f \circ F)(t)$.

$\boxed{\textbf{P2}}$ Considere las funciones

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longmapsto f(u,v) = (u\cos(v), u\operatorname{sen}(v)) \\ g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto g(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}(y/x)\right). \end{aligned}$$

(a) Calcular, cuando corresponda, $D(g \circ f)(u,v)$ y $D(f \circ g)(x,y)$.

(b) Determinar si $\operatorname{Dom}(f) = \operatorname{Dom}(g \circ f)$, y si $\operatorname{Dom}(g) = \operatorname{Dom}(g \circ f)$.

$\boxed{\textbf{P3}}$ Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$, considere la función

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Considerando norma euclideana, el objetivo de este problema es calcular ∇f.
(a) Haga el cálculo directo, para ello debe usar las derivadas parciales.
(b) Defina las funciones $\phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\phi_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_1(x) = Ax - b \quad \phi_2(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Componga adecuadamente y use regla de la cadena, para calcular ∇f.
Ind: En esta parte use que $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2$, para $x \in \mathbb{R}^m$.

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sea g la función definida por

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto g(x) = \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Estudiar la diferenciabilidad de g en $\mathbb{R}^2$.
Ind: Considere la igualdad $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ válida $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{P5}}$ Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, tal que sus componentes ϕ_1 y ϕ_2 verifican

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}$$

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f = h \circ \phi$. Demostrar que

$$\langle \nabla f(x,y), \nabla \phi_1(x,y) \rangle = \frac{\partial h}{\partial x}(\phi(x,y)) \cdot \|\nabla \phi_1(x,y)\|^2 .$$

Obs: Recordar que una función f es de clase $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, si es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$. Análogamente se define $\mathcal{C}^1(\Omega)$ con Ω abierto.

$\boxed{\textbf{P6}}$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Demostrar que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Si $t \mapsto g(t) = (t,t)$ con $t \in \mathbb{R}$, demostrar que $f \circ g$ es diferenciable y que se tiene la igualdad $(f \circ g)'(0) = \frac{1}{2}$.

(c) Mostrar que $\nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0$.

(d) Explicar por que aparentemente falla la regla de la cadena.

$\boxed{\textbf{P7}}$ Considere la función z definida por

$$\begin{aligned} z : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,r) &\longmapsto z(r,t) = t^p e^{-\frac{r^2}{4t}} \end{aligned}$$

Encontrar el valor del parámetro p, para el cual se cumple que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial z}{\partial r} \right)$$

$\boxed{\textbf{P8}}$ Se definen las funciones

$$\begin{aligned} (x,y) &\mapsto u(x,y) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+y^2\right), \quad x > 0, y \in \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto v(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sea $(x,y) \mapsto g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ donde $(u,v) \mapsto f(u,v)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \right]$$

$\boxed{\textbf{P9}}$ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Considere la función

$$h(\vec{x}) = \begin{cases} f(\|\vec{x}\|)g\left(\frac{\vec{x}}{\|x\|}\right) & \text{si} \quad \vec{x} \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} = 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que si $|f(a)| \leq a^2, \forall a \in \mathbb{R}$, entonces h es diferenciable en $\mathbb{R}^n$

(b) Demostrar que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|\vec{x}\| f'(\|\vec{x}\|) g\left(\frac{\vec{x}}{\|x\|}\right) = \langle \nabla h(\vec{x}), \vec{x} \rangle$$

(c) Demostrar que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

$$\left| f'(\|\vec{x}\|) g\left(\frac{\vec{x}}{\|x\|}\right) \right| \leq \|\nabla h(\vec{x})\|$$

y si $\vec{y}$ es ortogonal a $\vec{x}$, entonces

$$\langle \vec{y}, \nabla h(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\|\vec{x}\|} f(\|\vec{x}\|) \langle \nabla g\left(\frac{\vec{x}}{\|x\|}\right), \vec{y} \rangle$$

$\boxed{\textbf{P10}}$ Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ que satisface la ecuación de Laplace, es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

A partir de u se define $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ por

$$(s,t) \mapsto v(s,t) = u\left(st, \frac{1}{2}\left(s^2 - t^2\right)\right)$$

Demostrar que v también satisface la ecuación de Laplace.

$\boxed{\textbf{P11}}$ **[Más cadena...]**

(a) Sean $g, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^2$ tales que

$$f(x,y) = F(x, g(x)k(y), h(x,y)).$$

Se pide calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en términos de las derivadas parciales de F, g, h, k.

(b) Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^2$ tales que

$$F(x,y) = \operatorname{sen}(f(f(x,y),y))$$

Calcular $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

$\boxed{\textbf{P12}}$ **[Polares]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$, a partir de ella definimos la función $g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ por $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))$. Justifique que g es de clase $\mathcal{C}^2$ y demuestre que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

P13 **[Ecuación de Ondas]** Se desea encontrar una función $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ que sea solución de la *Ecuación de Ondas*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad c \neq 0$$

Para ello se propone el cambio de variables $\xi = x + ct, \eta = x - ct$, de modo que ϕ se obtenga como $(x,t) \mapsto \phi(x,t) = \psi(\xi(x,t), \eta(x,t))$, donde ahora $\psi(\xi, \eta)$ es la incógnita.

(a) Demostrar que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi}(\xi(x,t), \eta(x,t))$$

(b) Use la propiedad demostrada en la parte anterior, para probar que cualquier función ϕ de clase $\mathcal{C}^2$ que satisface la ecuación de ondas se puede escribir de la forma $\phi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, donde f y g son funciones de una variable.

P14 Sea $(r,s) \mapsto u(r,s)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$, que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,s) + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(r,s) = \frac{1}{r^2+s^2}$$

Considere el siguiente cambio de variables

$$(x,y) \mapsto r = e^x \cos(y), \quad (x,y) \mapsto s = e^x \operatorname{sen}(y)$$

y defina la función v como $(x,y) \mapsto v(x,y) = u\left(e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y)\right)$. Calcular

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

P15 Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Se definen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \cos(\varphi) \cdot f(r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi)) + \operatorname{sen}(\varphi) \cdot g(r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi)) \\ v(r,\varphi) &= -\operatorname{sen}(\varphi) \cdot f(r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi)) + \cos(\varphi) \cdot g(r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi)) \end{aligned}$$

Demostrar que

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi)) - \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi))$$

P16 Considere una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ en todo su dominio. Se define una nueva función f también de clase $\mathcal{C}^2$ cuyo dominio esta dado por el conjunto $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}$, tal que: $f(x,y) = g\left(xy, \frac{x}{y}\right)$. Suponga que f verifica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Si se definen las nuevas variables $u = xy, v = x/y$, demostrar que

$$\left(uv + \frac{u}{v}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\left(1 - v^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u}\left(1 + v^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v^2} + 2\frac{v^2}{u}\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

$\boxed{\textbf{P17}}$ Considere Σ un sistema de coordenadas en reposo, de modo que la posición de un punto del espacio P en un instante del tiempo t se representa por $P = (x, y, z, t)$. Sea otro sistema Σ^* que se mueve en la dirección x respecto a Σ, con velocidad constante $u(0 < u < c)$ y que cuando $t = 0$ coincide con Σ. Sea $\phi(x, y, z, t)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ que satisface la Ecuación de Ondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

(a) Sea P un punto de coordenadas (x, y, z, t) respecto a Σ, para representar P en el sistema Σ^* se plantea la transformación de coordenadas Galileana que corresponde al enfoque clásico

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Deducir dicho cambio de coordenadas. Sea ϕ_1 una función definida por $\phi_1(x', y', z', t') = \phi(x, y, z, t)$, demostrar que

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t'^2} + u^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x' \partial t'} \right].$$

(b) También se plantea la siguiente transformación de Lorentz que corresponde al enfoque relativista moderno

$$x' = \gamma_0 (x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma_0 \left(t - \frac{u}{c^2} x \right)$$

Donde $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$ y c es la velocidad de la luz. En este caso considere la función $\phi_2(x', y', z', t') = \phi(x, y, z, t)$.

(c) Demostrar que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \gamma_0 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t'} \right], \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y'}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z'}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma_0 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t'} - u \frac{\partial \phi_2}{\partial x'} \right].$$

(d) Usar lo anterior para deducir que la transformada de Lorentz mantiene invariante a la ecuación de ondas. Es decir

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t'^2}$$

$\boxed{\textbf{P18}}$ Considere la función u definida por

$$\begin{aligned} u :]0, \infty[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) &\longmapsto u(t, y), \end{aligned}$$

que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Si $u(t, y) = g\left(y^2/t\right)$, donde $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ es una función derivable, demostrar que g satisface la ecuación diferencial

$$g''(s) 4s + g'(s)(2 + s) = 0 \quad s \in]0, \infty[.$$

$\boxed{\textbf{P19}}$ Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^2$, dada por

$$T_i(\vec{x}) = u_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

es decir $T(\vec{x}) = \vec{u}$, donde $T(\vec{x}) = (T_1(\vec{x}), \ldots, T_n(\vec{x}))$ son las funciones coordenadas. Considere además las funciones $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\vec{u} \mapsto g(\vec{u})$ y $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de manera tal que $G = g \circ T$.

(a) Probar que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = \sum_{l=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_l \partial u_j} \cdot \frac{\partial T_l}{\partial x_i} \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial g}{\partial u_l} \cdot \frac{\partial^2 T_l}{\partial x_i^2} \right]$$

(b) Demostrar que

$$\Delta G = \mathrm{tr}\left((DT)^t \cdot H_g \cdot DT \right) + \Delta T \cdot \nabla g$$

Obs: Para este problema tenga en cuenta que

(i) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ entonces el laplaciano de f está definido por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Ahora si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces el laplaciano de T se define como

$$\Delta T = (\Delta T_1, \ldots, \Delta T_n)$$

(ii) Para $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, se define la traza como la suma de los elementos de su diagonal, es decir

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{donde } A = (a_{ij})$$

$\boxed{\textbf{P20}}$ Para buscar $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, función que satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

se pide

(a) Determine todas las funciones de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ con $\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$, para ello utilice las coordenadas $u(x, y) = x, v(x, y) = y/x$ y reescriba la ecuación original.

(b) De las soluciones encontradas en la parte anterior, determine ahora aquellas de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ tales que satisfacen además

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$$

$\boxed{\textbf{P21}}$ Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

(a) Dadas dos funciones $\psi_1, \psi_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas sobre un abierto y de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$, defina la función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$v(x,y) = u\left(\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)\right)$$

  (1) Calcule ∇v.

  (2) Calcule Δv, el laplaciano de v

(b) Suponga ahora que $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2$ y defina, para $(x,y) \neq (0,0)$, la función

$$v(x,y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Pruebe que $\Delta v = 0$ en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(c) Pruebe la contrarecíproca de la afirmación anterior, es decir, si se define v como arriba con $\Delta v = 0$ entonces necesariamente $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

$\boxed{\textbf{P22}}$ **[Conservación de la energía]** Considere una onda ondulante cuyo desplazamiento está modelado por una función $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de clase $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right)$ que satisface la ecuación

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

donde $c^2 = \tau/\rho$ y además, las derivadas $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$ son L-períodicas [1] en la variable x. La ecuación anterior que rige el movimiento de la cuerda está sujeta a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x); \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y g es continua en $]0,\infty[$. La energía del sistema ondulante en función del tiempo es igual a

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx$$

Muestre que la energía del sistema es constante en el tiempo, y concluya que este valor es igual a

$$E = \frac{\rho}{2}\int_0^L g(x)^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_0^L f'(x)^2 dx$$

[1] Una función h es L-periódica si $h(x+L) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{P23}}$ Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Pruebe que f es de clase $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$

(b) Calcule las segundas derivadas parciales de f en $(0,0)$

(c) Notando que $\partial_x\partial_y f(0,0) \neq \partial_y\partial_x f(0,0)$, ¿Qué puede concluir al respecto?, explique esta aparente contradicción con el Teorema de Schwarz

$\boxed{\textbf{P24}}$ **[Coordendas Cilíndricas]** Consideremos la siguiente transformación $T : (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de coordenadas cilíndricas, definida por

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

es decir, dada una tripleta de radio, ángulo polar y altura, T entrega el punto

$$(x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z))$$

asociado a estas cantidades. Considere ahora una función $f : \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ descrita en coordenadas cartesianas, es decir $f = f(x,y,z)$. Si consideramos $g = f \circ T$ tenemos que g es la función f descrita en coordenadas cilíndricas. Pruebe que en tal caso

$$\begin{aligned} \Delta_{(x,y,z)} f &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &=: \Delta_{(r,\theta,z)} g. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{P25}}$ **[Coordenadas esféricas]** Consideremos ahora la transformación $T : (0,\infty)\times[-\pi,\pi)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ de coordenadas esféricas, definida por

$$T(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, r\cos\varphi),$$

es decir, dada una tripleta de radio, ángulo polar y ángulo zenital, T entrega el punto

$$(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi))$$

asociado a estas cantidades. Considere ahora $f : \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ descrita en coordenadas cartesianas: es decir $f = f(x,y,z)$. Si consideramos $g = f \circ T$ tenemos que g es la función f descrita en coordenadas esféricas. Pruebe que en tal caso

$$\begin{aligned} \Delta_{(x,y,z)} f &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\cdot g)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) \\ &=: \Delta_{(r,\theta,\varphi)} g. \end{aligned}$$