Solución:

a) Clara/. h es diferenciable en $\mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}$ por álgebra de funciones relativa a la diferenciabilidad.

Ahora como $|f(a)| \leq a^2 \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(0)| \leq 0 \Rightarrow f(0)=0$.

$h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, veamos 1ero que $Dh(0) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_m}\right)(0) = 0_{1\times m}$

en efecto:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(0,\dots,\overset{j\text{-ésimo}}{t},\dots,0) - \overbrace{h(0,\dots,0)}^{=0}}{t} \qquad j=1,\dots,m$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(\|(0,\dots,t,\dots,0)\|)\, g\left(\frac{(0,\dots,t,\dots,0)}{\|(0,\dots,t,\dots,0)\|}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(|t|)\, \underbrace{g\left(\left(0,\dots,\frac{t}{|t|},\dots,0\right)\right)}_{g((0,\dots,\pm 1,\dots,0))}$$ $t>0$ o $t<0$

$(0,\dots,\pm 1,\dots,0) \in \overline{B}(0,1)$ g continua en $\Rightarrow$ ACOTADA

ARGUMENTO

Luego $\underbrace{\left|\frac{1}{t} f(|t|)\right|}\ \underbrace{|g((0,\dots,\pm 1,\dots,0))|}_{<\text{ acotado}}$ $\pm \leftarrow$ lím laterales en ambos casos g está acotada

$$\leq \frac{1}{|t|}\cdot |t|^2 = |t| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$ en ambos lados (i.e. los laterales)

Si no ocurriera esto el límite $\nexists$

$\therefore \frac{\partial h}{\partial x_j}(0) = 0 \quad \forall j = 1,\dots,m$

$\Rightarrow$ el candidato a diferencial de h en $(\vec{0})$ es

$Dh(\vec{0}) = (0,\dots,0) \in 1\times m$ ✓ y veamos por definición la diferenciabilidad de h en $\vec{0}$.//

Ahora vamos a calcular:

$$D\left(f(\|\cdot\|)\cdot g\left(\frac{\cdot}{\|\cdot\|}\right)\right)(x)$$

$$=\left(f(\|\cdot\|)\cdot D\left(g\circ\frac{\cdot}{\|\cdot\|}\right)\right)(x)+\left(g\left(\frac{\cdot}{\|\cdot\|}\right)D\left(f\circ\|\cdot\|\right)\right)(x)$$

¿Porque? ¿Regla del producto?

R-C

$$= f(\|x\|)\,Dg\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\cdot D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)+g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\underbrace{Df(\|x\|)}_{f'(\|x\|)\ f\text{ es real}}\cdot D(\|x\|)$$

$$= g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)f'(\|x\|)\,D(\|x\|)+f(\|x\|)\,Dg\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\cdot D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Vamos calculando cada término:

$x\overset{\varphi}{\longmapsto}\|x\| \Rightarrow D(\varphi)(x)=$ ¿?

Ya vimos en clases que $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ Dif del $\langle\cdot,\cdot\rangle$!!

$$\Rightarrow D(\varphi^2)(x)=2\varphi D\varphi(x)=x^tD(x)+x^tD(x)$$

$$\Rightarrow 2\|x\|\cdot D\varphi(x)=2x^tD(x)$$ ¿? cómo se calcula ¿?

$\tilde g$

$x\longmapsto\tilde g(x)=x$ $\Rightarrow D\tilde g\in M_{m\times m}$ pero $\dfrac{\partial\tilde g_i}{\partial x_j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$=(x_1,\dots,x_m)$

$\tilde g$ en vez de g para NO confundir con la g del problema.

$$\Rightarrow D\tilde g(x)=\begin{bmatrix}1 & & \emptyset\\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1\end{bmatrix}=I_{m\times m}$$ ✓✓

$$\Rightarrow \boxed{D(x)=I_{m\times m}}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\|x\|\,D(\|x\|)=2x^tD(x)=\cancel{2}x^tI_{m\times m}$$ ¿es la única forma de ver esto?!

$$\Rightarrow \boxed{D(\|x\|)=x^t/\|x\|}\ .//$$

HAY OTRA!! SEA $r^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ $(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \frac{\partial (r^2)}{\partial x_i}(x) = 2r \frac{\partial r}{\partial x_i} = 2x_i \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r}}$$

$$\Rightarrow Dr(x) = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_m} \right)(x) = \frac{1}{r}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{\|x\|} x^t \Rightarrow \boxed{D(\|x\|) = \frac{x^t}{\|x\|}}$$

quizá más fácil. //

volvemos: Ahora calculamos $D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

$$\hat{g}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto \hat{g}(x) = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|}(x_1, \dots, x_m) \Rightarrow D\hat{g} \in M_{m \times m}$$

$$\hat{g}_i(x) = \frac{x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}} \Rightarrow \frac{\partial \hat{g}_i}{\partial x_j} = \begin{cases} -x_i \dfrac{x_j}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{3/2}} ; & i \neq j \\ \dfrac{\|x\| \cdot 1 - \frac{x_i^2}{\|x\|}}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)} ; & i = j \end{cases}$$

go!

$\hat{g}$ en vez de g para no confundir

$$= \begin{cases} \dfrac{-x_i x_j}{\|x\|^3} ; & i \neq j \\ \dfrac{1}{\|x\|} - \dfrac{x_i^2}{\|x\| \cdot \|x\|^2} ; & i = j \end{cases}$$

go!

$$\Rightarrow D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} I_m - \frac{\overset{m\times 1}{x} \cdot \overset{1\times m}{x^t}}{\|x\|^3}$$

← pensar por qué da esto