Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-2 – Cálculo en Varias Variables

Auxiliar 9: Teorema del Valor Medio, Gradiente y Plano Tangente

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

$\boxed{\textbf{P1}}$ **[Gradiente y Curvas de Nivel]** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el conjunto de nivel

$$L_f(c) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$$

(i) Demuestre que $\nabla f(p)$ es perpendicular al conjunto de nivel $L_f(f(p))$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$
Ind: Si $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie ¨suave¨, el plano tangente a un punto p que denotamos T_pM se puede caracterizar como $T_pM = \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n | \gamma : (-a, a) \to M$ tal que $\gamma(0) = p\}$, esto es, el plano tangente coincide con el conjunto de todas las velocidades posibles que lleva un camino en M cuando está pasando por el punto p.

(ii) Demuestre que $(\nabla f(x_0), -1)$ es perpendicular a $\mathrm{Gr}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, concluya que el plano tangente al punto $(x_0, f(x_0))$ viene dado por los $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfacen la ecuación

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0)$$

$\boxed{\textbf{P2}}$ **[Aplicaciones: Plano Tangente]** Considere la superficie $\mathcal{H}^+ \subset \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{H}^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$$

(i) Determine $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $Gr(f) = \mathcal{H}^+$.

(ii) Pruebe que la ecuación del plano tangente a $\mathcal{H}^+$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ está dada por

$$zz_0 - xx_0 - yy_0 = 1$$

(iii) Determine el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ tal que el plano tangente a $\mathcal{H}^+$ es paralelo al plano OXY.
Ind: Recuerde que dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos.

$\boxed{\textbf{P3}}$ **[Teorema del Valor Medio]**

(a) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con U abierto y convexo. Supongamos que $\exists K > 0$ tal que $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

$$|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq K, \quad \forall x \in U$$

Demuestre que $\exists L > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, demuestre que existe $\theta \in (0, 1)$ para el cual

$$f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, \theta, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta, \theta, \theta) + \frac{\partial f}{\partial z}(\theta, \theta, \theta)$$

Resumen

Definición(Gradiente) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in U$ abierto. Definimos el gradiente de f en x, denotado $\nabla f(x)$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ compuesto por las derivadas parciales de f en x, i.e,

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$$

Proposición(Regla de Leibniz) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables, entonces

$$\nabla(\langle f, g\rangle)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$$

Teorema: Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces el vector unitario $v_0 = \frac{\nabla f(x_0}{\|\nabla f(x_0)\|}$ representa la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x_0

Teorema: El gradiente $\nabla f(x)$ es siempre ortogonal (o normal) a la curva de nivel que pasa por x

Definición(Hiperplano) En $\mathbb{R}^n$ un hiperplano es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que dado un punto base $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el vector que une x_0 y x es ortogonal a otro vector "normal" $N \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, fijo y previamente dado. En otras palabras, el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\langle N, x - x_0\rangle = 0$$

Definición(Hipersuperficie) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en U abierto. Una hipersuperficie suave en $\mathbb{R}^n$, definida por f (denotada $S(f)$), es el conjunto de puntos (no vacío) $x \in \mathbb{R}^n$, soluciones de la ecuación

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_d),$$

y donde además se satisface $\nabla f(x) \neq 0$ en tales puntos.

En otra palabras, $S(f) := \{x \in U : f(x) = 0, \nabla f(x) \neq 0\}$

Observación La noción de hipersuperficie es muy similar a la noción de conjunto de nivel cero para f que denotamos $N_0(f)$ con la sola diferencia de que ahora pedimos f de clase C^1. En otras palabras, una hipersuperficie es un subconjunto particular del conjunto de nivel cero para f

Definición (Hiperplano tangente) Sea S una hipersuperficie suave determinada por una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea también $x_0 \in S$. Definimos el hiperplano tangente a S en x_0 como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle = 0$$

Observación: Lo anterior dice que para f diferenciable en x_0, su gradiente es siempre ortogonal a la hipersuperficie definida por f

Teorema: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces el hiperplano en $\mathbb{R}^{n+1}$ centrado en $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ de ecuación

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

es tangente al grafo de f en $(x_0, f(x_0))$. Más aún, el vector

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

es perpendicular (o normal) a este hiperplano y al grafo de f

Definición(Conjunto convexo) Sea E un espacio vectorial, diremos que $C \subset E$ es convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in C$, el segmento que une x e y, denotado por $[x, y]$ y definido por

$$[x, y] := \{z \in E : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1]\}$$

está contenido en C.

Definición(Cono) Sea E un espacio vectorial, diremos que $C \subset E$ es un cono si $\forall x \in C$ y $\forall \lambda > 0$ se tiene que $\lambda x \in C$

Teorema(Teorema del Valor Medio) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en U abierto y convexo. Entonces, para cualquier par de puntos $x, y \in U$, existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y\rangle$$

donde $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, es decir $z \in [x, y]$

Pauta Aux 9

P1 **[Gradiente y Curvas de Nivel]** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el conjunto de nivel

$$L_f(c) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$$

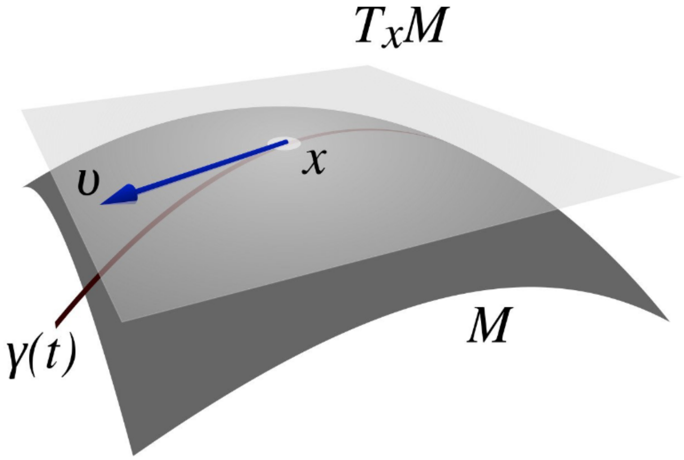
(i) Demuestre que $\nabla f(p)$ es perpendicular al conjunto de nivel $L_f(f(p))$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$
Ind: Si $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie ¨suave¨, el plano tangente a un punto p que denotamos T_pM se puede caracterizar como $T_pM = \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n | \gamma : (-a, a) \to M \text{ tal que } \gamma(0) = p\}$, esto es, el plano tangente coincide con el conjunto de todas las velocidades posibles que lleva un camino en M cuando está pasando por el punto p.

(ii) Demuestre que $(\nabla f(x_0), -1)$ es perpendicular a $\text{Gr}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, concluya que el plano tangente al punto $(x_0, f(x_0))$ viene dado por los $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfacen la ecuación

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0)$$

Idea (i): $\nabla f(x)$ es ortogonal al plano tangente que se encuentre sobre la superficie $L(f(P))$ en el punto $P \in L(f(P))$, que denotamos $T_P L(f(P))$

Ind: Figure: Espacio Tangente



PDQ: $\forall h \in T_P L(f(P))$, $\langle \nabla f(P), h \rangle = 0$

Dem: Consideremos $P \in \mathbb{R}^n$ y el conjunto

$$L(f(P)) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(P)\}$$

Tenemos que $\forall h \in L_P(f(P))$ $\exists \gamma : (-a, a) \to L_P(f(P))$ tal que $\gamma(0) = P$ y $\gamma'(0) = h$ (IND)

Notemos que por definición,

$$f(\gamma(t)) = f(P) \ (\text{cte}) \quad \forall t \in (-a, a)$$

Derivando respecto a t tenemos $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$

Por regla de la cadena

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

Evaluando en $t=0$

$$\langle \nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = 0$$

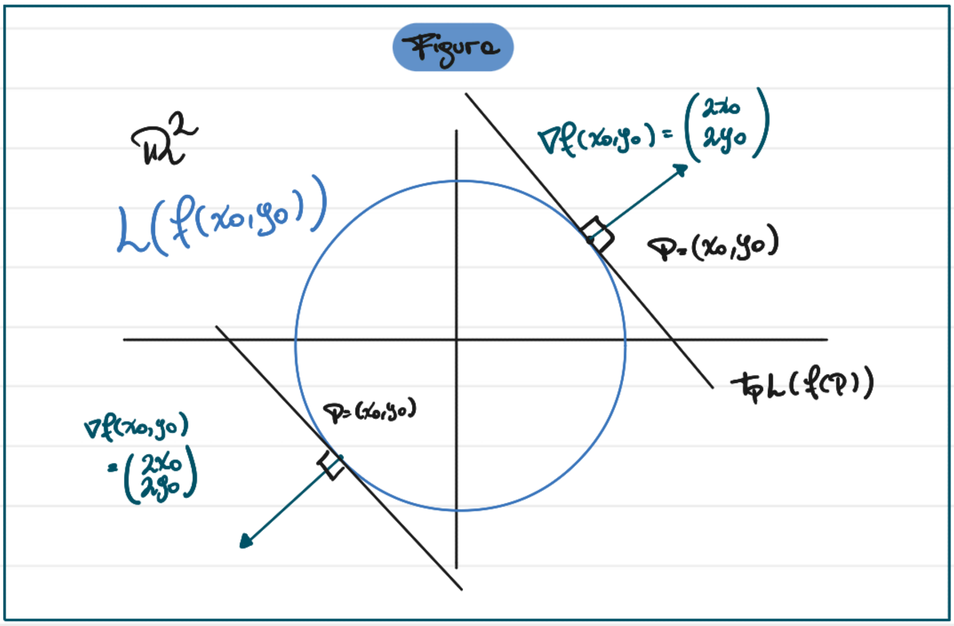
$$\Leftrightarrow \quad \langle \nabla f(P), h \rangle = 0 \quad \forall h \in T_P L_f(f(P))$$

Pues $h \in T_P L(f(P))$ es arbitrario, $\nabla f(P)$ es perpendicular a $L_f(f(P))$, y como P es arbitrario se concluye.

Ejemplo intuitivo: Pensemos en $f(x,y) = x^2+y^2$, consideremos $P = (x_0, y_0)$ y $x_0^2+y_0^2 = r^2$. Vemos que

$$L(f(x_0,y_0)) = L(r^2) = \{(x,y) : x^2+y^2 = r^2\} = rS^1$$

Por otro lado, $\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$, luego gráficamente tenemos



(ii) Demuestre que $(\nabla f(x_0), -1)$ es perpendicular a $\mathrm{Gr}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, concluya que el plano tangente al punto $(x_0, f(x_0))$ viene dado por los $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfacen la ecuación

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0)$$

Consideremos $Gr(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = y\}$ y la función auxiliar

$$F(x,y) = f(x) - y$$

Notemos que $Gr(f) = L_F(0)$ $\left[\begin{array}{l} \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : F(x,y) = 0\} \\ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = y\} \end{array} \right]$

Luego,

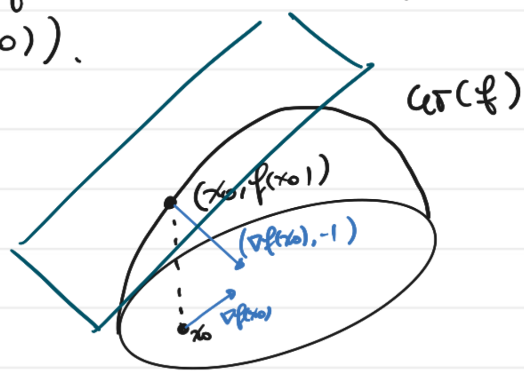
$\Rightarrow$ $\nabla F(x_0, y_0)$ es perpendicular a $Gr(f)$ en $(x_0, y_0) \in Gr(f)$

$\left(\frac{\partial}{\partial y}(f(x) - y) = -1\right)$

Por otro lado, $\nabla F(x_0,y_0) = \left(D_x F(x_0,y_0), D_y F(x_0,y_0)\right)$

$$= (\nabla f(x_0), -1)$$

Concluimos que $(\nabla f(x_0), -1)$ es perpendicular a $Gr(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en $(x_0, y_0) \in Gr(f) \Leftrightarrow (x_0, f(x_0))$.



Por lo demás, el plano tangente viene dado por los elementos ortogonales a $(\nabla f(x_0), -1)$ en $(x_0, f(x_0))$

Esto es, los (x,y) tales que

$$\left\langle \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - f(x_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Equivalentemente,

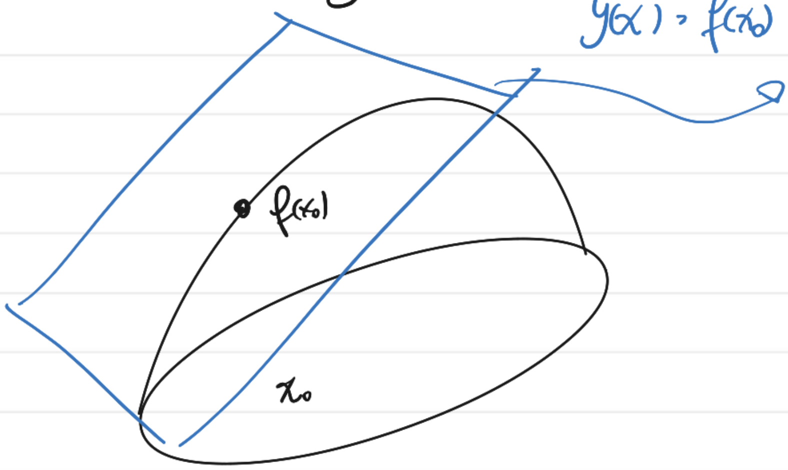
$$\nabla f(x_0)^T (x-x_0) - (y - f(x_0)) = 0$$

$$\iff \quad y = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0)$$

Comentario importante: Si una función es f es diff $\Rightarrow \exists Df(x) = \nabla f(x)^T$ tal que

$$f(x+h) = \underbrace{f(x) + Df(x)h}_{y(x)} + o(h)$$

$y(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x-x_0)$



luego $y(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0)$ es precisamente la aproximación lineal de f entorno a x_0.

P2 **[Aplicaciones: Plano Tangente]** Considere la superficie $\mathcal{H}^+ \subset \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{H}^+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$$

(i) Determine $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $Gr(f) = \mathcal{H}^+$.

(ii) Pruebe que la ecuación del plano tangente a $\mathcal{H}^+$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ está dada por

$$zz_0 - xx_0 - yy_0 = 1$$

(iii) Determine el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ tal que el plano tangente a $\mathcal{H}^+$ es paralelo al plano OXY.
Ind: Recuerde que dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos.

(i) Consideramos $Gr f : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y) = z\}$

luego si $(x,y,z) \in \mathcal{H}^+ \Rightarrow z^2 - x^2 - y^2 = 1 \ , \ z > 0$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1 + x^2 + y^2 \ , \ z > 0$$

Como $z > 0$, $(x,y,z) \in \mathcal{H}^+ \Leftrightarrow z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

Por lo tanto, tomando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ tenemos que

$$Gr f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\} = \mathcal{H}^+ \qquad (\Omega = \mathbb{R}^2)$$

(ii) Dado lo anterior, vemos que $\mathcal{H}^+$ es el grafo de la función f que es diff, luego el plano tangente viene dado por la ecuación

$$z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0)^T \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \qquad (P1)$$

Tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right] = \dfrac{1}{2} \dfrac{2x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right] = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

luego, $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{z_0} \\ \frac{y_0}{z_0} \end{bmatrix} \qquad (z_0 = f(x_0, y_0))$

Entonces, el plano tangente viene dado por los $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$z = z_0 + \begin{bmatrix} \frac{x_0}{z_0} \\ \frac{y_0}{z_0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$z = z_0 + \frac{x_0}{z_0}(x - x_0) + \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{z_0}x - \frac{x_0^2}{z_0} + \frac{y_0}{z_0}y - \frac{y_0^2}{z_0} + z_0 - z = 0 \quad / (\cdot z_0)$$

$$\Leftrightarrow x x_0 - x_0^2 + y y_0 - y_0^2 + z_0^2 - z z_0 = 0$$

Equivalentemente,

$$z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 = z z_0 - x x_0 - y y_0$$

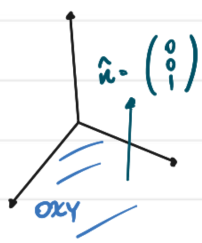
Pero como $z_0 = \sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2} \Rightarrow z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 = 1$, luego la ec. del plano tangente está dado por

$$z z_0 - x x_0 - y y_0 = 1$$

(iii) Determine el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ tal que el plano tangente a $\mathcal{H}^+$ es paralelo al plano OXY.
Ind: Recuerde que dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales son paralelos.

(iii) El vector normal (o perpendicular) al plano viene dado por $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$.

Por otro lado, el vector normal a OXY es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Suponiendo que sean paralelos, existe λ tal que

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{x_0}{z_0} \\ \frac{y_0}{z_0} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \wedge \frac{x_0}{z_0} = \frac{y_0}{z_0} = 0 \Rightarrow x_0 = 0, \ y_0 = 0$$

Luego el punto está en $(0,0,z_0)$, y $z_0 = f(0,0) = 1$, concluimos que el punto buscado es $(0,0,1) \in H^+$.

P3 **[Teorema del Valor Medio]**

(a) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con U abierto y convexo. Supongamos que $\exists K > 0$ tal que $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

$$|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq K, \quad \forall x \in U$$

Demuestre que $\exists L > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, demuestre que existe $\theta \in (0,1)$ para el cual

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial z}(\theta,\theta,\theta)$$

TVM:

Teorema(Teorema del Valor Medio) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en U abierto y convexo. Entonces, para cualquier par de puntos $x, y \in U$, existe $\lambda \in [0,1]$ tal que

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle$$

donde $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, es decir $z \in [x,y]$

(a) PDQ: $\exists L > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \leq L\|x-y\| \ \forall x,y \in U$

Sean $x,y \in U$, como U es abierto y convexo, por TVM existe $z \in [x,y]$ tal que

$$f(x)-f(y) = \langle \nabla f(z), x-y \rangle$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |\langle \nabla f(z), x-y \rangle|$$

$$\overset{c.s}{\leq} \|\nabla f(z)\| \|x-y\|$$

Puesto que $z \in U$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| \leq K$

$$\Rightarrow \|\nabla f(z)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} K^2\right)^{1/2} = L$$

luego, concluimos

$$|f(x)-f(y)| \leq L\|x-y\| \quad \forall x,y \in U$$

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, demuestre que existe $\theta \in (0,1)$ para el cual

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial z}(\theta,\theta,\theta)$$

Dem: Puesto que $\mathbb{R}^3$ es convexo y abierto y f es diff tenemos por TVM que $\exists z \in [(1,1,1),(0,0,0)]$ tal que

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = \langle \nabla f(z), (1,1,1)-(0,0,0) \rangle$$

Puesto que $z \in [(1,1,1),(0,0,0)] \Rightarrow \exists \theta \in (0,1)$ tal que $z = (\theta,\theta,\theta)$

Entonces tenemos,

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = \langle \nabla f(z), (1,1,1) - (0,0,0) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad f(1,1,1) - f(0,0,0) = \langle \nabla f(\theta,\theta,\theta), (1,1,1) \rangle$$

Por lo tanto

$$f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta,\theta,\theta) + \frac{\partial f}{\partial z}(\theta,\theta,\theta)$$