FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 10: Teorema de la Función Inversa & Implícita

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Teorema de la Función Inversa]** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

(i) Pruebe que f no es inyectiva, y por lo tanto, no es invertible sobre todo $\mathbb{R}^2$.

(ii) Demuestre que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ existen abiertos U, V en $\mathbb{R}^2$ con $(x, y) \in U$ y $f(x, y) \in V$ tales que $f : U \to V$ es biyectiva.

P2 **[Teorema de la Función Implícita I]** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y + \sin(xyz) + z^2 &= 1 \\ e^{yz} + xz &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Muestre que el sistema anterior define implícitamente dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en una vecindad de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ que satisfacen el sistema de ecuaciones anterior.

P3 **[Teorema de la Función Implícita II]** Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2xz &= y^2 + w^2 \\ z^3 &= x^3 + y^3 + w^3. \end{aligned} \tag{2}$$

(i) Mostrar que existe un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene a $(1, 1)$ y funciones $y, w : A \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tales que $y = y(x, z)$ y $w = w(x, z)$ son soluciones del sistema de ecuaciones anterior, y además $y(1, 1) = -1$, $w(1, 1) = 1$.

(ii) Mostrar que $\nabla y(1, 1) = \binom{-1}{0}$ y $\nabla w(1, 1) = \binom{0}{1}$.

(iii) **[Propuesto]** Calcular las matrices Hessianas $Hy(1, 1)$, $Hw(1, 1)$. **Ind**: Derive dos veces el sistema de ecuaciones (2) respecto de x y de z para deducir los Hessianos.

(iv) **[Propuesto]** Muestre que los polinomios de Taylor de grado dos, que aproximan a $y(x, z)$ y

$$p(x, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - x - xz, \quad q(x, z) = -\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} + z + xz \tag{3}$$

P4 **[Propuesto]** Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 - x^2 + 2 &= 0 \\ yz + xz - xy - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

define dos funciones implícitas $y(x)$, $z(x)$ en un entorno del punto $(2, 1, 1)$ tales que $(x, y(x), z(x))$ es solución del sistema en dicho entorno.

Resumen

Teorema 1 (Teorema de la Función Inversa) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en Ω. Supongamos que para algún $x_0 \in \Omega$, la derivada $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible (i.e, $\det(Df(x_0)) \neq 0$). Entonces existen abiertos U, V con $x_0 \in U \subset \Omega$ e $y_0 := f(x_0) \in V$, tales que $f|_U : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1, esto es, una biyección tal que $f|_U^{-1}$ es de clase C^1. Además, por ser $(f|_U)^{-1} : V \to U$ continua y diferenciable en todo punto de V, se tiene $Df|_U^{-1}(f|_U(x_0)) = (Df|_U(x_0))^{-1}$*

Teorema 2 (Teorema de la Función Implicita) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Sea $Df(x_0, y_0) = [D_x f(x_0, y_0), D_y f(x_0, y_0)]$ la derivada de f en (x_0, y_0), supongamos que $D_y f(x_0, y_0)$ es invertible. Entonces existen abiertos U, W con $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ y $x_0 \in W$ tales que para cada $x \in W$ existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y $f(x, y) = 0$, lo que define una función $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, en particular $y_0 = g(x_0)$, de manera que*

$$f(x, g(x)) = 0, \forall x \in W$$

además

$$Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x))$$

Definición 1 (Matriz Hessiana) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$. Llamamos matriz Hessiana de f en x a la matriz $D(\nabla f)(x)^T$, que denotamos:*

$$D^2 f(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

otras formas comunes para denotar la matriz Hessiana son $Hf(x)$ o bien $f''(x)$.

Proposición 1 *Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^2(U)$ y $\bar{x} \in U, D^2 f(\bar{x})$ es simétrica, y por lo tanto sus valores propios son reales.*

Teorema 3 (Teorema de Taylor) *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^{k+1} en A, $k \geq 1$, con A abierto. Sean también $x_0 \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 + th \in A$, para todo $t \in [0, 1]$. Entonces, la siguiente expansión de f es válida:*

$$f(x_0 + h) = P_k(x_0, h) + R_{k+1}(x_0, h) \qquad (5)$$

$$P_k(x_0, h) := \sum_{\ell=0}^{k} T_\ell(x_0, h)$$

donde $T_\ell(x_0, h)$ es el monomio de Taylor de orden ℓ, dado por la expresión

$$T_\ell(x_0, h) := \frac{1}{\ell!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_\ell=1}^{n} \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\ell}}(x_0) h_{i_1} \cdots h_{i_\ell},$$

para $1 \leq \ell \leq k$, y $R_{k+1}(x_0, h)$ es el resto de orden $k+1$ de la expansión (5), dado por

$$R_{k+1}(x_0, h) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}(x_0 + sh) h_{i_1} \cdots h_{i_{k+1}}$$

para cierto $s \in [0, 1]$.

Corolario 1 *Supongamos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en A, y sean $x_0 \in A, h \in \mathbb{R}^n$ pequeño. Entonces, el polinomio de Taylor de orden dos para f en torno a x_0, denotado $P_2(x_0, h)$ viene dado, explícitamente, por la expresión*

$$f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j,$$

Equivalentemente, se puede escribir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \frac{1}{2} h^T D^2 f(x_0) h$$

o bien, escogiendo $h = x - x_0$ tenemos $f(x) \approx$

$$f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0)$$

para x cerca de x_0.