Auxiliar 13

Más EDP

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Hallar una solución acotada a la ecuación de Laplace en coordenadas polares en el complemento del disco $x^2 + y^2 < 1$, bajo las condiciones

$$(P)\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi) \\ u_\theta(r,-\pi) = u_\theta(r,\pi) \\ u(1,\theta) = 1 + 3\sin(\theta) - \sin^4(\theta) \quad \theta \in (-\pi,\pi) \end{cases}$$

Indicación: La siguiente ecuación diferencial (conocida como ecuación tipo Euler-Cauchy)

$$x^2y'' + xy' + ky = 0, \quad k \text{ cte}$$

tiene soluciones del tipo $y(x) = x^\lambda$.

Pregunta 2

Considere el problema

$$(P)\begin{cases} \Delta u = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 \quad \text{(EQ)} \\ u(x,0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(CB)} \\ \lim_{y\to\infty} |u(x,y)| < \infty, & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x \mapsto u(x,y), f(x) \text{ integrables}$$

a) Si $\hat{u}$ es la transformada de Fourier de $u(\cdot, y)$ con respecto a la variable x (para cada y fijo), deduzca que se tiene la ecuación:

$$\hat{u}_{yy} - s^2\hat{u} = 0$$

Y deduzca que la solución general es:

$$\hat{u}(s,y) = A(s)e^{|s|y} + B(s)e^{-|s|y}$$

b) Deduzca imponiendo (CB) y la condición $\lim_{y\to\infty} |u(x,y)| < \infty$ que

$$\hat{u}(s,y) = \hat{f}(s)e^{-|s|y}$$

c) Concluya, utilizando propiedades de convolución e inversión de la Transformada de Fourier, que:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt$$