PAUTA

Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Sábado 6 de Julio de 2024.

CONTROL 1 (recuperativo)

P1. Encuentre la solución general de las siguientes EDO's y la solución al problema de valor inicial cuando corresponda.

a) (1,5 pts.) $y' = 1 + 3\tan(x)y$

b) (1,5 pts.) $\nu\, y' + k\, y = g$, $y(0) = 0$, donde ν, k y g son constantes positivas.

c) (1,5 pts.) $y' + y\ \cos(x) = 2\cos(x)$

d) (1,5 pts.) $y\, y' = 3\, x^2\, (y^2 + 1)$, $y(0) = 1$

P2. El siguiente es un modelo que se puede utilizar para el estudio del crecimiento de una población. Se asume que la tasa promedio de nacimientos por indiciduo es una constante positiva y que la tasa promedio de defunciones por individuo es proporcional a la población. Este modelo se puede expresar como la Ecuación Logística,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = b - a\, y$$

donde $y(t) > 0$ es la población al tiempo t, y a, b son constantes positivas.

a) (1,0 pts.) Para la EDO, indique lo siguiente:

(*i*) el orden

(*ii*) el tipo o nombre de la EDO

(*iii*) si es homogénea o no,

(*iv*) si es a coeficientes constantes o variables

(*v*) si es lineal o no lineal

b) (3,0 pts.) Encuentre la solución general de la EDO.

c) (1,0 pt.) Encuentre la solución que satisface la condición inicial $y(0) = y_o > 0$.

d) (0,5 pts.) ¿Cuál es el límite de la solución cuando $t \to \infty$? Interprete el resultado.

e) (0,5 pts.) Encuentre una condición sobre a y b para que la población aumente.

TIEMPO: 2 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.

NOTA: Cada item en la P1 tiene 1,5 pts en total. La distribución de puntajes debe hacerse lo más homogéneo posible si la respuesta se obtiene por un desarrollo alternativo

P1. a) $y' = 1 + 3\tan(x)\cdot y$

Sol: reordenando términos de la EDO, queda

$y' - 3\tan(x)\cdot y = 1$ Factor integrante $\mu(x) = e^{\int -3\tan(x)\,dx}$ ← 0,2 pts

$$-3\int \tan(x)\,dx = -3\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx \quad \text{sea} \quad \begin{aligned} w &= \cos(x) \\ dw &= -\operatorname{sen}(x)\,dx \end{aligned}$$

$$= 3\int \frac{1}{w}\,dw = 3\ln(|w|) = \ln(|w|^3) = \ln(|w^3|)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\ln(|w^3|)} = |w^3| = |\cos^3(x)| = \begin{cases} \cos^3(x) & \text{si } > 0 \\ -\cos^3(x) & \text{si } < 0 \end{cases}$$

0,2 pts

sin embargo el signo NO importa porque $\mu(x)$ multiplica ambos lados de la EDO.

$\Rightarrow$ tomamos $\boxed{\mu(x) = \cos^3(x)}$ ← 0,2 pts

multiplicando ambos lados de la EDO

$$\Rightarrow \cos^3(x)\,y' - 3\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\cdot y = \cos^3(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^3(x)\,y\right)' = \cos^3(x) \quad \Big/ \int dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^3(x)\cdot y = \int \cos^3(x)\,dx + C}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

0,2 pts

Necesitamos la primitiva

$$\int \cos^3(x)\,dx = \int \cos(x)\cdot\cos^2(x)\,dx$$

$$= \int \cos(x)\cdot(1-\operatorname{sen}^2(x))\,dx = \underbrace{\int \cos(x)\,dx}_{(*)} - \underbrace{\int \cos(x)\operatorname{sen}^2(x)\,dx}_{(**)}$$

$$(*) = \int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$$ 0,2 pts

$$(**) = \int \cos(x)\operatorname{sen}^2(x)\,dx$$ sea $u = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x)\,dx$

$$= \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}$$

$$\Rightarrow \int \cos^3(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} = \operatorname{sen}(x)\cdot\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{3}\right)$$

0,2 pts

Luego tenemos

$$\cos^3(x)\,y = \operatorname{sen}(x)\cdot\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{3}\right) + C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{3}\right) + \frac{C_1}{\cos^3(x)}}$$ 0,3 pts

solución general de la EDO

P1 (b) / $\nu \cdot y' + k y = g \qquad y(0) = 0 \qquad \nu > 0$

Normalizamos la EDO

$$y' + \frac{k}{\nu} y = \frac{g}{\nu}$$

se puede proceder por factor integrante o por separación de variables!

0,3 pts

Nota: cualquiera de los dos métodos es válido.

Factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{k}{\nu} dt} = e^{\frac{k}{\nu} t}$$

0,3 pts

reemplazando en la EDO

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{k}{\nu} t} y\right)' = \frac{g}{\nu} e^{\frac{k}{\nu} t} \quad \Big/ \int dt$$

$$e^{\frac{k}{\nu} t} y = \frac{g}{\nu} \int e^{\frac{k}{\nu} t} dt + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

0,3 pts

$$= \frac{g}{\nu} \cdot \frac{\nu}{k} e^{\frac{k}{\nu} t} + C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{g}{k} + C_1 \cdot e^{-\frac{k}{\nu} t}}$$

solución general de la EDO.

0,3 pts

La condición inicial $y(0) = 0$

$$\Rightarrow y(0) = \frac{g}{k} + C_1 \cdot e^{0} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{g}{k}.$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{\nu} t}\right)}$$

0,3 pts

Nota: es igualmente válido si se ocupa separación de variables.

P1) e) $y' + \cos(x) \cdot y = 2\cos(x)$

Sol: se puede proceder usando factor integrante o separación de variables. (Cualquiera de los dos tiene puntaje) 0,3 pts

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int \cos(x)dx} = e^{\operatorname{sen}(x)}$ ← 0,3 pts

$$\Rightarrow e^{\operatorname{sen}(x)} y' + \cos(x) e^{\operatorname{sen}(x)} y = 2\cos(x) e^{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\operatorname{sen}(x)} y\right)' = 2\cos(x) e^{\operatorname{sen}(x)} \quad / \int dx$$ ← 0,3 pts

$$\Rightarrow e^{\operatorname{sen}(x)} y = 2\int \cos(x) e^{\operatorname{sen}(x)} dx + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$ ← 0,3 pts

$$= 2 e^{\operatorname{sen}(x)} + C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 2 + C_1 e^{-\operatorname{sen}(x)}}$$ Solución general de la EDO.

↑ 0,3 pts

■

P1 d) $y\,y' = 3x^2(y^2+1)$ $\quad y(0)=1$

Sol: Por separación de variables $\leftarrow$ 0,3 pts

$$\frac{y}{y^2+1}\,y' = 3x^2 \quad \Big/ \int dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{y^2+1}\,y'\,dx = \int 3x^2\,dx + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{y}{y^2+1}\,dy}_{(*)} = x^3 + C_1 \quad \leftarrow \text{0,3 pts}$$

$$(*) = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy \qquad u = 1+y^2 \quad \boxed{du = 2y\,dy} \Rightarrow \frac{1}{2}du = y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|)$$

$$\Rightarrow \ln(|u|) = 2x^3 + 2C_1 \quad / e^{(\,)}$$

0,1 pts

$$|u| = e^{2x^3+2C_1} = K\,e^{2x^3} \qquad K>0 \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow u(x) = \left\{\begin{matrix} K e^{2x^3} & \text{si } u>0 \\ -K e^{2x^3} & \text{si } u<0 \end{matrix}\right\} = A\cdot e^{2x^3} \qquad A \in \mathbb{R}$$

0,2 pts

pero $u = 1+y^2 = A\,e^{2x^3}$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = A\,e^{2x^3} - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \pm\sqrt{Ae^{2x^3}-1}}$$ ← puede ser cualquiera de los 2 signos, y el signo dependerá del signo de la condición inicial.

solución general

0,3 pts

Para la condición inicial $y(0)=1$ $\quad y(0)>0$ } 0,1 pts

$\Rightarrow$ usamos $y(x) = \sqrt{Ae^{2x^3}-1}$

$$y(0) = \sqrt{A\cdot e^{0}-1} = \sqrt{A-1} = 1 \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$\Rightarrow$ la solución al problema de valor inicial es

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2e^{2x^3}-1}}$$ ← 0,2 pts

P2. El siguiente es un modelo que se puede utilizar para el estudio del crecimiento de una población. Se asume que la tasa promedio de nacimientos por indiciduo es una constante positiva y que la tasa promedio de defunciones por individuo es proporcional a la población. Este modelo se puede expresar como la Ecuación Logística,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = b - a\,y$$

donde $y(t) > 0$ es la población al tiempo t, y a, b son constantes positivas.

a) (1,0 pts.) Para la EDO, indique lo siguiente:

   (*i*) el orden

   (*ii*) el tipo o nombre de la EDO

   (*iii*) si es homogénea o no,

   (*iv*) si es a coeficientes constantes o variables

   (*v*) si es lineal o no lineal

b) (3,0 pts.) Encuentre la solución general de la EDO.

c) (1,0 pt.) Encuentre la solución que satisface la condición inicial $y(0) = y_o > 0$.

d) (0,5 pts.) ¿Cuál es el límite de la solución cuando $t \to \infty$? Interprete el resultado.

e) (0,5 pts.) Encuentre una condición sobre a y b para que la población aumente.

Sol: a) (Total 1pto) La edo se puede reescribir como:

$$\frac{dy}{dt} - by + ay^2 = 0$$

i) es de orden 1 (UNO) (0,2 pts)

ii) El tipo o Nombre de la edo puede ser → Bernoulli (Directo de la EDO) → Variables Separables $\left(\frac{1}{y(b-ay)}\,y' = 1\right)$

cualquiera de los dos esta bien (0,2 pts).

iii) es una edo homogenea (ya que todos los terminos de la EDO dependen de y o de sus derivadas.) (0,2 pts)

iv) es a coeficientes constantes (0,2 pts)

v) la EDO es No lineal (ya que Aparece el termino y^2, que es un término que define una relación No lineal con la función incógnita.)

(0,2 pts)

Sol/ b) (Total 3pts) / si se multiplica la EDO por y queda

0,5 pts

$$\frac{dy}{dt} = by - ay^2 \quad \leftarrow \text{EDO de Bernoulli con } \underline{n=2}$$

luego se puede utilizar el C.V.

$$u = y^{1-n} = y^{1-2} = \boxed{\frac{1}{y} = u}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{y^2}\frac{d}{dt} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt}}$$

luego reemplazando el C.V en la EDO, se tiene

0,5 pts

$$\Rightarrow -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = \frac{b}{u} - \frac{a}{u^2} \quad / \cdot -u^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = a - bu \Rightarrow \boxed{\frac{du}{dt} - bu = a} \quad (*)$$

0,5 pts

Para resolver (*) se puede usar factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int b\,dt} = e^{bt} \leftarrow$$

0,5 pts

$$\Rightarrow e^{bt}\frac{du}{dt} - b e^{bt} u = a e^{bt} \Rightarrow \left(e^{bt}u\right)' = a e^{bt} \quad / \int dt$$

$$\Rightarrow e^{bt} u = a\int e^{bt}\,dt + C_1 = \frac{a}{b}e^{bt} + C_1 \quad / \cdot e^{-bt}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{a}{b} + C_1 e^{-bt}} \quad \text{pero } u = \frac{1}{y}$$

0,5 pts

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{\frac{a}{b} + C_1 e^{-bt}}} \quad \text{solución general de la EDO}$$

0,5 pts

Nota: Forma alternativa de resolución de la EDO.

La EDO $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = b - ay$ se puede identificar como una EDO a variables separables. **0,5 pts**

en efecto,

$$\Rightarrow \frac{1}{y\cdot(b-ay)}\frac{dy}{dt} = 1 \quad \Big/ \int dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{y\cdot(b-ay)}\,dy = \int dt + C_1' = t + C_1'} \quad (*) \quad C_1' \in \mathbb{R}$$

0,5 pts

Para desarrollar la integral se puede usar fracciones parciales

$$\frac{1}{y\cdot(b-ay)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{b-ay} = \frac{A\cdot(b-ay) + By}{y\cdot(b-ay)}$$

$$= \frac{Ab + y\cdot(B - Aa)}{y\cdot(b-ay)}$$

0,3 pts (la descomposición en fracciones parciales)

$$\Rightarrow A\cdot b = 1 \quad \wedge \quad B - Aa = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{b}} \quad \boxed{B = A\cdot a = \frac{a}{b}}$$

0,1 pts **0,1 pts**

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y\cdot(b-ay)}\,dy = \frac{1}{b}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{a}{b}\int \frac{1}{b-ay}\,dy$$

$$= \frac{1}{b}\cdot \ln(|y|) - \frac{1}{b}\ln(|b-ay|) = \frac{1}{b}\ln\left(\left|\frac{y}{b-ay}\right|\right)$$

reemplazando la integral en (*)

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\left|\frac{y}{b-ay}\right|\right) = bt + bC_1 \quad / e^{(\cdot)}$$

0,4 pts

$$\boxed{\Rightarrow \quad \left|\frac{y}{b-ay}\right| = e^{bt}\cdot e^{bC_1} = k\, e^{bt} \quad \boxed{k>0}}$$

0,3 pts

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{y}{b-ay} = C_{1,2}\, e^{bt}} \quad \boxed{C_{1,2}\in\mathbb{R}}$$

0,3 pts

despejando y: como $y>0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{b-ay}{y} = C_{1,2}^{-1}\, e^{-bt}$$

$$\Rightarrow \quad y\cdot C_{1,2}^{-1} e^{-bt} + ay = b$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{b}{a + C_2^{-1}\cdot e^{-bt}}}$$

Solución general de la EDO

0,5 pts

Notar que como C_2 es cualquier constante en $\mathbb{R}$, $y(t)$ se puede reescribir de la forma

$$y(t) = \frac{1}{\frac{a}{b} + C\, e^{-bt}} \quad \text{con } C\in\mathbb{R},$$

Nota: cualquier otro desarrollo que esté bien realizado, y que llegue al mismo resultado debe ser considerado válido en la corrección y asignarle puntaje correspondiente.

Sol P2.c) (Total 1pt) De la parte b), se tiene la solución general

$$y(t) = \frac{1}{\frac{a}{b} + c_1 e^{-bt}}$$

$$y(0) = y_0 > 0 \Rightarrow y(t=0) = \frac{1}{\frac{a}{b} + c_1 e^{0}} = \frac{1}{\frac{a}{b} + c_1} = y_0$$

$$\Rightarrow c + \frac{a}{b} = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{y_0} - \frac{a}{b}}$$ 0,5 pts

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{\frac{a}{b} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{a}{b}\right) e^{-bt}}}$$

0,5pts

Solución de la EDO que satisface la condición inicial

Sol P2 d) (Total 0,5pts)

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{a}{b} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{a}{b}\right) e^{-bt}} = \frac{b}{a}$$ ← 0,4 pts

Luego, independiente del valor de la condición inicial, la población tiende a estabilizarse en el valor $\frac{b}{a}$

0,1 pts

Sol P2 e) (Total 0,5 pts)

Para que la población aumente se necesita que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) > y_0 \Rightarrow \boxed{\frac{b}{a} > y_0}$$

0,5 pts