Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Sábado 6 de julio.

CONTROL 2 (recuperativo)

P1. a) (3 ptos) Para la siguiente EDO, encuentre la solucion homogénea y usando anuladores determine la forma que posee la solución particular (sin calcular las constantes involucradas) de la EDO:

$$y''' + 2y'' + 2y' = x^2 + xe^{-x}\sin(x).$$

Solución 1. *La ecuación característica* $p(\lambda) = 0$ *es:*

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

de donde los valores característicos son (todos de multiplicidad 1*):*

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm i \ 1pt$$

La solución homogénea es entonces:

$$y_h = C_1 + C_2e^{-x}\sin x + C_3e^{-x}\cos x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \ 0{,}5pt$$

La solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \ 0{,}25pt$$

donde asociado al lado derecho x^2 *(resonante con* $\lambda_1 = 0$*) tenemos la solución particular de la forma:*

$$y_{p_1} = x(A_0 + A_1x + A_2x^2). \ 0{,}5pt$$

y asociado al lado derecho $xe^{-x}\sin(x)$ *(resonante con* $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$*) tenemos la solución particular de la forma:*

$$y_{p_2} = x(B_0 + B_1x)e^{-x}\cos x + x(D_0 + D_1x)e^{-x}\sin x. \ 0{,}75pt$$

donde las constantes $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, D_0, D_1$ *se obtienen reemplazando las soluciones particulares respectivas* y_{p_1} *e* y_{p_2} *en las EDO* $y''' + 2y'' + 2y' = x^2$ *y* $y''' + 2y'' + 2y' = xe^{-x}\sin x$ *respectivamente, e igualando coeficientes.*

Nota: La solución general es de la forma $y(x) = y_h + y_p$ *pero eso no se pide en el enunciado.*

b) (3 ptos) Determine la solución general de la siguiente EDO usando el método de variación de parámetros:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 2x, \quad x > 0.$$

Para ello, busque primero una solución homogénea de la forma $y_1(x) = x^n$ y use la fórmula de Abel o la de Liouville para obtener otra solución homogénea linealmente independiente. No olvide establecer la ecuación normalizada.

Solución 2. *Reemplazando $y = x^n$ en la homogénea se obtiene:*

$$x^2 n(n-1)x^{n-2} + 3xnx^{n-1} + x^n = 0, \quad x > 0$$

es decir

$$n(n-1) + 3n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = 0$$

de donde $n = -1$ y una solución particular es

$$y_1(x) = \frac{1}{x}. \ 0{,}5pt$$

La otra solución homogénea se puede obtener de la fórmula de Abel:

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = C \exp\left(-\int \overline{a}_1\right),$$

donde $\overline{a}_1$ es el coeficiente que acompaña a la primera derivada en la ecuación normalizada

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{2}{x} \ 0{,}25pt$$

es decir $\overline{a}_1 = \frac{3}{x}$ de donde

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = C \exp\left(-\int \frac{3}{x}\right) = \frac{C}{x^3}$$

De este modo (fórmula de Liouville)

$$y_2 = Cy_1 \int \frac{1/x^3}{y_1^2} = \frac{C}{x}\int \frac{1}{x} = C\frac{\ln x}{x}.$$

Escogemos sin pérdida de generalidad que $C = 1$ por lo que

$$y_2(x) = \frac{\ln x}{x}. \ 0{,}5pt$$

El Wronskiano ya lo calculamos y es:

$$W(x) = \frac{1}{x^3}. \ 0{,}25pt$$

Con esto, aplicamos la fórmula de variación de parámetros 0,5pt:

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \overline{Q}}{W} + y_2 \int \frac{y_1 \overline{Q}}{W}$$

que con $\overline{Q}(x) = \frac{2}{x}$ nos da:

$$y_p(x) = -\frac{2}{x}\int x \ln x + \frac{2\ln x}{x}\int x = -\frac{2}{x}\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + x\ln x = \frac{x}{2}. \ 0{,}75pt$$

La solución general es pues:

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2 \ln x}{x} + \frac{x}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \ 0{,}25pt$$

P2. Un péndulo lineal está modelado por la EDO

$$\theta''(t) + \alpha\theta'(t) + \beta\theta(t) = F(t),\ t > 0$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo que forma con la vertical en el instante t, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son coeficientes de roce y elasticidad respectivamente y $F(t) = e^{at}\cos(\gamma t)$ es una fuerza aplicada. Encuentre él o los valores de los parámetros reales a y γ para que el sistema entre en resonancia. Justifique su respuesta en términos de la forma que tiene la solución particular en este caso.

Solución 3. *La ecuación característica es:*

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \ \textcolor{red}{0{,}5pt}$$

cuyas soluciones son los valores característicos:

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}. \ \textcolor{red}{0{,}5pt}$$

El sistema entra en resonancia cuando

$$\lambda = \lambda_0, \qquad \lambda_0 = a \pm i\gamma$$

y λ_0 está asociado al lado derecho. $\textcolor{red}{2pt}$

Esto se traduce en:

$$a = -\frac{\alpha}{2}, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{4\beta - \alpha}}{2}. \ \textcolor{red}{1pt}$$

Esto se debe a la forma que tiene la solución particular en este caso es:

$$y_p = t\,e^{at}(A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)) \ \textcolor{red}{1pt}$$

donde A, B son constantes a determinar. Y la solución tiene entonces un módulo o amplitud que crece inicialmente debido al factor t. $\textcolor{red}{1pt}$

Nota: la forma de la solución homogénea no se pide.