P1 (Formula de variación de Parámetros)

Sea E Banach y consideremos la ecuación lineal no homogénea

$$(1) \qquad x'(t) = A\,x(t) + B(t) \qquad t \in I$$

entonces, pruebe que para $t_0 \in I$, $x_0 \in E$, la solución de (1) tq que $x(t_0) = x_0$ es dada por:

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\,ds$$

__Dem__: Hacemos lo mismo que en variación de parámetros de EDO clásico. Buscamos soluciones del tipo $\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} y(t)$ con $y: I \to E$ a determinar. Por bilinealidad,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= [e^{(t-t_0)A}]' y(t) + e^{(t-t_0)A} y'(t)\\ &= A e^{(t-t_0)A} y(t) + e^{(t-t_0)A} y'(t)\\ &= A\,\varphi(t) + e^{(t-t_0)A} y'(t).\end{aligned}$$

De donde se debe cumplir que

$$e^{(t-t_0)A} y'(t) = B(t)$$

Por propiedad de la inversa del exponencial, obtenemos

$$y'(t) = e^{(t_0-t)A} B(t)$$

Haciendo

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)A} B(s)\,ds$$

obtenemos $\varphi(t_0) = Id\; y(t_0) = x_0$ y además se cumple (1) con

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{(t-t_0)A}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)A} B(s)\,ds\right)\\ &= e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\,ds \qquad \square\end{aligned}$$

P2| sea $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ y $\alpha \in E$ por $\alpha(x) = x^2e^x + 1$. ②

consideramos $A \in \mathcal{L}(E)$ por $(Af)(x) = \alpha(x)\cdot f(x)$.

consideramos además, $b : \mathbb{R} \to E$ por $b(t)(x) = \operatorname{sen}(x)\,e^{-tx}$.

resuelva

$$y'(t) = Ay(t) + b(t)$$

con la condición inicial $y(0)(x) = \cos(\ln(x+1))$.

sol: vemos que $(A^n f)(x) = (\alpha(x))^n f(x)$ con lo que

$$[\exp(tA)f](x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n A^n(f)(x)}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n(\alpha(x))^n}{n!}\cdot f(x)$$

$$= e^{t\alpha(x)} f(x)$$

entonces por P1,

$$y(t) = \exp(tA)\,y(0) + \int_0^t \exp((t-s)A)\,b(s)\,ds$$

para $x \in [0,1]$.

$$\exp(tA)\,y(0)(x) = e^{t(x^2e^x+1)}\cos(\ln(x+1))$$

Además,

$$\left(\int_0^t \exp((t-s)A)\,b(s)\,ds\right)(x) = \int_0^t [\exp((t-s)A)\,b(s)](x)\,ds$$

$$= \int_0^t e^{(t-s)\alpha(x)}\cdot \operatorname{sen}(x)\,e^{-sx}\,ds$$

$$= \operatorname{sen}(x)\,e^{t\alpha(x)} \int_0^t e^{-s(\alpha(x)+x)}\,ds$$

$$= \operatorname{sen}(x)\,e^{t\alpha(x)} \left.\frac{e^{-s(\alpha(x)+x)}}{-(\alpha(x)+x)}\right|_0^t = \operatorname{sen}(x)\,e^{t\alpha(x)}\,\frac{1-e^{t(\alpha(x)+x)}}{\alpha(x)+x}$$

Entonces, tenemos

$$y(t)(x) = e^{t(x^2e^x+1)}\cos(\ln(x+1))$$
$$+ \operatorname{sen}(x)\, e^{t(1+x^2e^x)} \frac{1-e^{-t(1+x^2e^x)}}{1+x^2e^x+x}.$$

P3| sea H hilbert y $X = \mathcal{L}(H)$. sea además $A_0 \in X$ fijo y $S \in X$ autoadjunto. Resuelva:

$$x'(t) = x(t) + x^*(t) + tS$$
$$x(0) = A_0.$$

sol: tendríamos que calcular la exponencial del operador

$$t(\mathrm{Id} + T) \quad \text{con} \quad Tx = x^*.$$

ya que Id y T conmutan, entonces

$$\exp(t(\mathrm{Id}+T)) = \exp(t\mathrm{Id}) \circ \exp(tT)$$

$$\cdot)\ \exp(t\mathrm{Id})\,x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n \mathrm{Id}^n(x)}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n x}{n!} = e^t \cdot x$$

$$\cdot\cdot)\ \exp(tT)\,x = \sum_{t\in\mathbb{N}} \frac{t^n T^n(x)}{n!} = \underbrace{\sum_{\substack{t\in\mathbb{N}\\ \text{par}}} \frac{t^n}{n!}}_{\substack{\text{Parte par}\\ \text{de } \exp(\cdot)}} x + \underbrace{\sum_{\substack{t\in\mathbb{N}\\ \text{impar}}} \frac{t^n}{n!}}_{\substack{\text{Parte impar}\\ \text{de } \exp(\cdot)}} x^*$$

$$= \cosh(t)\,x + \operatorname{senh}(t)\,x^*$$

$$\Rightarrow \exp(t(\mathrm{Id}+T))\,x = e^t(\cosh(t)\,x + \operatorname{senh}(t)\,x^*)$$

Por variación de parámetros, se obtiene: ④

$$x(t) = \exp(t(Id+T))\underbrace{x(0)}_{A_0} + \int_0^t \exp((t-s)(Id+T))\,b(s)\,ds$$

$$= e^t(\cosh(t)A_0 + \operatorname{senh}(t)\hat{A_0}) + \int_0^t e^{t-s}(\cosh(t-s)sS + \operatorname{senh}(t-s)sS)\,ds$$

$$= \quad '' \quad + e^{2t}\int_0^t s e^{-2s} S\,ds$$

$$= \quad '' \quad + e^{2t}\left(-t\frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{1}{4}\right)S$$

Así,

$$x(t) = e^t(\cosh(t)A_0 + \operatorname{senh}(t)\hat{A_0}) + \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{2t}}{4}\right)S$$