Problema 1:

1.- Determinando las condiciones de borde

- $F(L) = EA(L)\frac{du}{dx}(L) = P$
- $u(x=0) = 0$

$\ast$ Dado que el área varía linealmente:

$A(x) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{L}x$

$\therefore A(x) = A_1\left(1 - \frac{x}{L}\right) + A_2\left(\frac{x}{L}\right)$

2.- Determinando una expresión para el campo de desplazamiento longitudinal $u(x)$.

↳ Para resolver esta sección, debemos resolver la ecuación diferencial de equilibrio: $-\frac{d}{dx}\left(EA(x)\frac{du}{dx}\right) = q(x)$ → Tomando en cuenta los datos del enunciado, integramos una vez en x:

$\int \frac{d}{dx}\left(EA(x)\frac{du}{dx}\right) = \int 0\,dx \longrightarrow EA(x)\frac{du}{dx} = C_1$ → Como vemos, para todo x el resultado es constante. Usamos nuestra condición de borde:

C.B.: $F(L) = EA(L)\frac{du}{dx} = P$

$\therefore EA(L)\frac{du}{dx} = C_1 = P \longrightarrow C_1 = P$

Ahora, reemplazando C_1 podemos despejar $\frac{du}{dx}$ (conociendo además que $A(x) = A_1\left(1 - \frac{x}{L}\right) + A_2\left(\frac{x}{L}\right)$ [mm²]

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{P}{E\left(A_1\left(1-\frac{x}{L}\right) + A_2\left(\frac{x}{L}\right)\right)}}$$ → Ahora integramos en x

$u(x) = \frac{-LP\cdot \ln(|(A_1 - A_2)\cdot x - A_1\cdot L|)}{E\cdot(A_1 - A_2)} + C_2$ → Ahora, podemos usar nuestra última condición de borde

C.B.: $u(x=0) = 0$

$u(x=0) = \frac{-LP\cdot \ln(|(A_1 - A_2)\cdot 0 - A_1\cdot L|)}{E(A_1 - A_2)} + C_2 = 0$ → Recordar! $\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|)$

$\therefore \frac{LP\cdot \ln(A_1\cdot L)}{E(A_1 - A_2)} = C_2$

Así, obtenemos que $$\boxed{u(x) = \frac{-LP\cdot \ln(|(A_1 - A_2)\cdot x - A_1\cdot L|)}{E(A_1 - A_2)} + \frac{LP\cdot \ln(A_1\cdot L)}{E(A_1 - A_2)}}$$

↳ Ahora podemos sustituir los valores de las áreas y constantes para obtener la expresión final.

$$\boxed{u(x) = \frac{300}{11}\cdot \ln\left(\frac{52000}{52000 - 11x}\right)}$$

3) Determinando una expresión para el esfuerzo ingenieril $\sigma(x)$.

Sabemos que $\sigma(x) = E\cdot \frac{du}{dx}$ (Ley de Hooke)

$$\boxed{\therefore \sigma(x) = \frac{-60000}{11x - 52000}}$$

Problema 2:

1.- Determinando la matriz de rigidez global del problema.

Asumiremos un pequeño desplazamiento en el nodo 1.

$$\sum F_x: \ -k(u_1 - u_2) + f_{x1} = 0$$
$$ku_1 - ku_2 = f_{x1}$$

Asumiremos un pequeño desplazamiento en el nodo 1.

$$\sum F_x: \ -k(u_2 - u_1) - k(u_2 - u_3) + f_{x2} = 0$$
$$-ku_1 + 2ku_2 - ku_3 = f_{x2}$$

Asumiremos un pequeño desplazamiento en el nodo 1.

$$\sum F_x: -k(u_3 - u_2) - k(u_3 - u_4) + f_{x3} = 0$$
$$-ku_2 + 2ku_3 - ku_4 = f_{x3}$$

Asumiremos un pequeño desplazamiento en el nodo 1.

$$\sum F_x: -k(u_4 - u_3) - k(u_4 - u_5) + f_{x4} = 0$$
$$-ku_3 + 2ku_4 - ku_5 = f_{x4}$$

Asumiremos un pequeño desplazamiento en el nodo 1.

$$\sum F_x: \ -k(u_5 - u_4) + f_{x5} = 0$$
$$-ku_4 + ku_5 = f_{x5}$$

Así, de esta forma podemos construir la matriz de rigidez global. (Ordenamos los términos que acompañan a cada u_n)

P. ej:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
f_{1x}	k	$-k$	0	0	0
f_{2x}	$-k$	$2k$	$-k$	0	0
f_{3x}	0	$-k$	$2k$	$-k$	0
f_{4x}	0	0	$-k$	$2k$	$-k$
f_{5x}	0	0	0	$-k$	k

↳ Esto será nuestra matriz de rigidez global.

$$[K_g] = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.- Determinando los desplazamientos nodales

Ecuación de compatibilidad: $[K]\cdot\{u\} = \{f\}$ → Dado que $u_1 = u_5 = 0$, usamos solo los términos de la matriz K de u_2, u_3 y u_4.

$$k \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \left(k \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 3/4k & 1/2k & 1/4k \\ 1/2k & 1/k & 1/2k \\ 1/4k & 1/2k & 3/4k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/2k \\ P/k \\ P/2k \end{Bmatrix}$$

3.- Determinando las reacciones del sistema.

Del paso anterior conocemos todos los desplazamientos del sistema, por lo que podemos usar la matriz de rigidez global para calcular las reacciones.

$$k \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2k \\ P/k \\ P/2k \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ -P/2 \end{Bmatrix} //$$

$$\therefore R_{x1} = -P/2$$
$$R_{x2} = -P/2$$