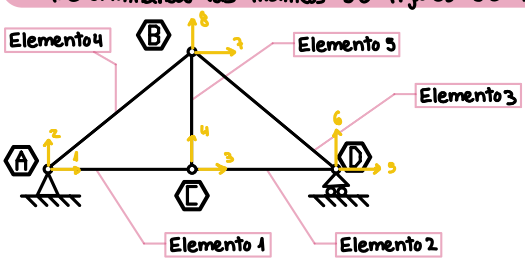
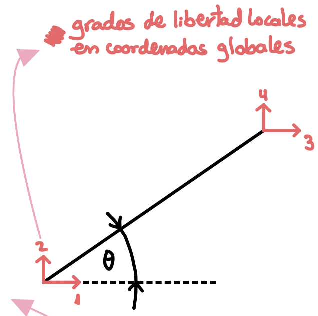
Problema 1

1.- Determinando las matrices de rigidez de los elementos.



$C = \cos(\theta)$ $\quad S = \sin(\theta)$

$$\left(\frac{EA}{L}\right)_n \begin{bmatrix} c^2 & & & Sim. \\ cs & s^2 & & \\ -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$



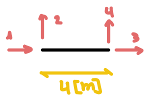
- $E = 200$ [GPa] • $A = 0{,}0015$ [m^2]

→ Primero, debemos encontrar las rigideces locales de cada elemento del enrejado. Para ello, usaremos la matriz de rigidez!

Rigidez elemento 1

$$[k]_1 = \frac{EA}{4} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & & & s^2 \\ cs & s^2 & & \\ -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

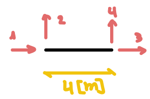
$\cos(\theta) = 1$
$\sin(\theta) = 0$
$\therefore c^2 = 1$
$\therefore s^2 = 0$
$\therefore cs = 0$



Rigidez elemento 2

$$[k]_2 = \frac{EA}{4} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & & & s^2 \\ cs & s^2 & & \\ -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

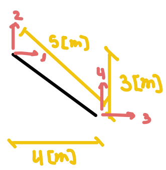
$\cos(\theta) = 1$
$\sin(\theta) = 0$
$\therefore c^2 = 1$
$\therefore s^2 = 0$
$\therefore cs = 0$



Rigidez elemento 3

$$[k]_3 = \frac{EA}{5} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & & & s^2 \\ cs & s^2 & & \\ -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

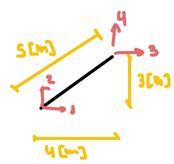
$\cos(\theta) = 4/5$
$\sin(\theta) = -3/5$
$\therefore c^2 = 16/25$
$\therefore s^2 = 9/25$
$\therefore cs = -12/25$



Rigidez elemento 4

$$[k]_4 = \frac{EA}{5} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & & & s^2 \\ cs & s^2 & & \\ -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

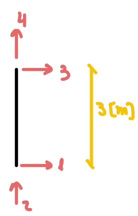
$\cos(\theta) = 4/5$
$\sin(\theta) = 3/5$
$\therefore c^2 = 16/25$
$\therefore s^2 = 9/25$
$\therefore cs = 12/25$



Rigidez elemento 5

$$[k]_5 = \frac{EA}{3} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & & & s^2 \\ cs & s^2 & & \\ -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$\cos(\theta) = 0$
$\sin(\theta) = 1$
$\therefore c^2 = 0$
$\therefore s^2 = 1$
$\therefore cs = 0$



↳ Notar que no reemplacé EA, ya que como todos los elementos comparten los mismos valores para E y A, los vamos a dejar factorizados para facilitar el cálculo.

Vamos ahora a reemplazar los valores!

Rigidez elemento 1

$$[k]_1 = EA\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & & & S \\ 0 & 0 & & \\ -1/4 & 0 & 1/4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$\cos(\theta) = 1$

$\sin(\theta) = 0$

$\therefore C^2 = 1$

$\therefore S^2 = 0$

$\therefore CS = 0$

Rigidez elemento 2

$$[k]_2 = EA\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & & & S \\ 0 & 0 & & \\ -1/4 & 0 & 1/4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$\cos(\theta) = 1$

$\sin(\theta) = 0$

$\therefore C^2 = 1$

$\therefore S^2 = 0$

$\therefore CS = 0$

Rigidez elemento 3

$$[k]_3 = EA\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 16/125 & & & S \\ -12/125 & 9/125 & & \\ -16/125 & 12/125 & 16/125 & \\ 12/125 & -9/125 & -12/125 & 9/125 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$\cos(\theta) = 4/5$

$\sin(\theta) = -3/5$

$\therefore C^2 = 16/25$

$\therefore S^2 = 9/25$

$\therefore CS = -12/25$

Rigidez elemento 4

$$[k]_4 = EA\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 16/125 & & & S \\ 12/125 & 9/125 & & \\ -16/125 & -12/125 & 16/125 & \\ -12/125 & -9/125 & 12/125 & 9/125 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$\cos(\theta) = 4/5$

$\sin(\theta) = 3/5$

$\therefore C^2 = 16/25$

$\therefore S^2 = 9/25$

$\therefore CS = 12/25$

Rigidez elemento 5

$$[k]_5 = EA\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & & & S \\ 0 & 1/3 & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$\cos(\theta) = 0$

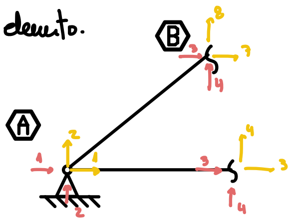
$\sin(\theta) = 1$

$\therefore C^2 = 0$

$\therefore S^2 = 1$

$\therefore CS = 0$

¡Ojo! Notar que en amarillo anoté los grados de libertad de la estructura completa, que calzan con las rigideces de los grados de libertad de cada elemento.



Por ejemplo, el elemento 4 comparte sus grados de libertad locales 3 y 4, con los 7 y 8 de la estructura respectivamente.

→ Ahora que hemos calculado todas las rigideces, procedemos a ensamblar la matriz global, sumando las rigideces entre sí.

$$[k]_G = EA\cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/4 + 16/125 & & & & & & & \\ 12/125 & 9/125 & & & & S & & \\ -1/4 & 0 & 1/2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & & & & \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 + 16/125 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12/125 & 9/125 & & \\ -16/125 & -12/125 & 0 & & -16/125 & 12/125 & 32/125 & \\ -12/125 & -9/125 & 0 & -1/3 & 12/125 & -9/125 & 0 & \frac{18}{125} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$