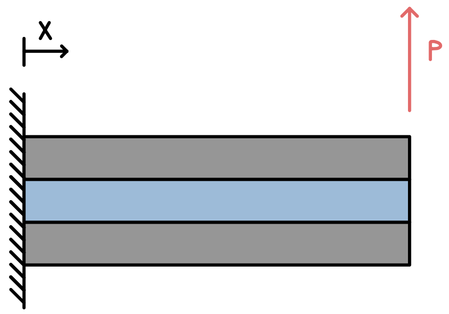

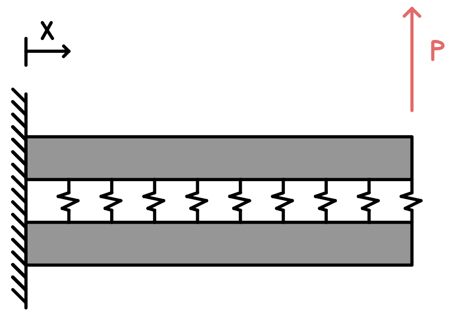

a) Tenemos que

↳ $V_1(x) = a_1 x^3/L^3 + b_1$

↳ $V_2(x) = a_2 x^3/L^3 + b_2$

$V_1(x=0) = 0 \longrightarrow b_1 = 0$

$V_2(x=0) = 0 \longrightarrow b_2 = 0$

Con ello la ecuación de la deflexión queda consistente con el método de Rayleigh-Ritz.

Rayleigh Ritz: $\Pi_{viga} = U_{deformación} + \Phi_{cargas\ externas}$

↳ $\boxed{\therefore\ \Pi_{viga} = \frac{1}{2}\int_L EI\left(\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_L v(x)^2\cdot k\, dx - \int_L F(x)\cdot V(x)\, dx}$

$u \rightarrow$ deflexión en la dirección x

$v \rightarrow$ deflexión en la dirección y

$f(x=L)\cdot V(x=L) = P\cdot\frac{a_1\cdot L^3}{L^3} = Pa_1$

b) Dado que en el enunciado nos dicen que: $V_i(x) = \frac{a_i x^3}{L^3} + b$ $\longrightarrow V_1(x) = \frac{a_1x^3}{L^3}$ y $V_2(x) = \frac{a_2x^3}{L^3}$

Así, reemplazando en la ecuación de Π_{viga}:

$$\Pi_{viga} = \frac{1}{2}\int_L EI\left(\frac{d^2V_1}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_L EI\left(\frac{d^2V_2}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_L k\cdot\left((a_2x^3/L^3) - (a_1x^3/L^3)\right)^2 dx - Pa_1$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{6a_1x}{L^3}\right)^2 dx \quad \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{6a_2x}{L^3}\right)^2 dx + \frac{k}{2}\int_0^L\left((a_2x^3/L^3) - (a_1x^3/L^3)\right)^2 dx - Pa_1$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EI\,\frac{36a_1^2x^2}{L^6}\, dx \quad \frac{1}{2}\int_0^L EI\,\frac{36a_2^2x^2}{L^6}\, dx + \frac{k}{2}\int_0^L\left((a_2x^3/L^3) - (a_1x^3/L^3)\right)^2 dx - Pa_1$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EI\,\frac{36a_1^2x^2}{L^6}\, dx \quad \frac{1}{2}\int_0^L EI\,\frac{36a_2^2x^2}{L^6}\, dx + \frac{k}{2}(a_2-a_1)^2\int_0^L \frac{x^6}{L^6} dx - Pa_1$$

$$= \frac{6EIa_1^2}{L^3} + \frac{6EIa_2^2}{L^3} + k(a_2-a_1)^2\frac{L}{14} - Pa_1 \qquad \text{con } k = \frac{\beta\cdot EI}{L^4}$$

$$= \frac{6EIa_1^2}{L^3} + \frac{6EIa_2^2}{L^3} + \left(\frac{\beta EIa_2^2}{L^{\cancel{4}\,3}} - \frac{2\beta EIa_1a_2}{L^{\cancel{4}\,3}} + \frac{\beta EIa_1^2}{L^{\cancel{4}\,3}}\right)\frac{\cancel{L}}{14} - Pa_1$$

$$= \frac{EI}{L^3}\left(6a_1^2 + 6a_2^2 + \frac{\beta a_2^2}{14} - \frac{\beta a_1a_2}{7} + \frac{\beta a_1^2}{14}\right) - Pa_1$$

Despejamos para a_1 y a_2:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} = \frac{EI}{L^3}\left(12a_1 - \frac{\beta a_2}{7} + \frac{\beta a_1}{7}\right) - P = 0 \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = \frac{EI}{L^3}\left(12a_2 + \frac{\beta a_2}{7} - \frac{\beta a_1}{7}\right) = 0$$

$$\frac{EI}{L^3}\left(-\frac{\beta}{7}a_2 + a_1(12+\beta/7)\right) = P \qquad \frac{EI}{L^3}\left(a_2(12+\beta/7) - \frac{\beta a_1}{7}\right) = 0$$

$$(EI/L^3)\cdot\begin{bmatrix} 12+\beta/7 & -\beta/7 \\ -\beta/7 & 12+\beta/7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12+\beta/7 & -\beta/7 \\ \beta/7 & 12+\beta/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PL^3/EI \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = \left(12+\beta/7\right)^2 - \left(-\beta/7\right)^2$$

$$\det = 144 + \frac{24\beta}{7} + \frac{\beta^2}{49} - \frac{\beta^2}{49}$$

$$\det = 144 + \frac{24\beta}{7}$$

$$\det = \frac{1008+24\beta}{7}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{7}{1008+24\beta} \begin{bmatrix} 12+\beta/7 & \beta/7 \\ \beta/7 & 12+\beta/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} PL^3/EI \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{84+\beta}{1008+24\beta} & \frac{\beta}{1008+24\beta} \\ \frac{\beta}{1008+24\beta} & \frac{84+\beta}{1008+24\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} PL^3/EI \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{PL^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{84+\beta}{1008+24\beta} \\ \frac{\beta}{1008+24\beta} \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{PL^3}{24EI} \cdot \frac{84+\beta}{42+\beta}$$

$$a_2 = \frac{PL^3}{24EI} \cdot \frac{\beta}{42+\beta}$$

c)

a_1: $$\lim_{\beta\to\infty} \frac{PL^3}{24EI} \cdot \cancelto{1}{\frac{84+\beta}{42+\beta}} = \frac{PL^3}{24EI}$$

a_2: $$\lim_{\beta\to\infty} \frac{PL^3}{24EI} \cdot \cancelto{1}{\frac{\beta}{42+\beta}} = \frac{PL^3}{24EI}$$

Dado que β es parte de la constante de rigidez del material elástico, cuando esta tiende a infinito el material se vuelve imposible de deformar, por lo que la viga 1 transmite toda su energía a la viga 2.

Por otro lado, cuando β tiende a 0 el material pierde toda rigidez y la viga 1 logra moverse libremente, mientras que la viga 2 nunca recibe nada.

a_1: $$\lim_{\beta\to 0} \frac{PL^3}{24EI} \cdot \frac{84+\cancelto{0}{\beta}}{42+\cancelto{0}{\beta}} = \frac{PL^3}{12EI}$$

a_2: $$\lim_{\beta\to 0} \frac{PL^3}{24EI} \cdot \frac{\cancelto{0}{\beta}}{42+\beta} = 0$$