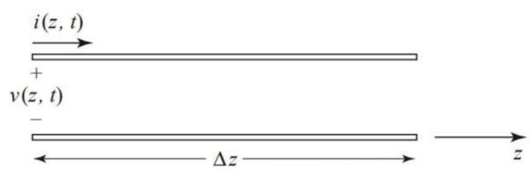
Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 8
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1 Resumen: Lineas de transmisión y carta Smith

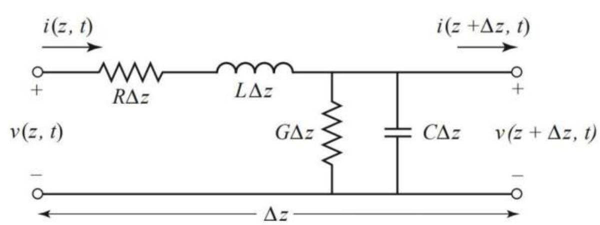
Las líneas de transmisión se refieren a cualquier medio o estructura utilizada para transmitir señales eléctricas o electromagnéticas desde un punto a otro. Algunos ejemplos son:

- **Microstrip**: Una forma de línea de transmisión utilizada en circuitos impresos, donde un conductor está colocado sobre un sustrato dieléctrico.
- **Cable Coaxial**: Consiste en un conductor central rodeado por un aislante y una malla conductora, utilizado comúnmente en sistemas de comunicación.
- **Líneas de Transmisión de RF:** Incluyen diversas configuraciones, como líneas de cinta, líneas coaxiales y líneas de microondas, utilizadas para transmitir señales de radiofrecuencia en sistemas de comunicación y electrónica.
- **Fibra Óptica:** Aunque técnicamente no es una línea de transmisión eléctrica, las señales de luz se utilizan para transmitir datos a través de fibras ópticas en sistemas de comunicación modernos.

En el curso nos centraremos en el lineas de transmisión de tipo rectangular y de las siguientes:



(a)



Donde los diferentes elementos que posee la linea de transmisión representan lo siguiente:

- R: Perdida del conductor.
- L: Autoinductancia.
- G: Perdida por el dieléctrico.
- C: Efecto capacitivo entre ambas lineas.

Donde las ecuaciones de voltaje y corriente vienen caracterizadas por una ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 V(z) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad (2)$$

Lo que permite mediante notación fasorial ser expresadas como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (3)$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (4)$$

Donde el parámetro γ viene caracterizado por:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (5)$$

Se logra relacionar la corriente con el voltaje como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (6)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left(V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}\right) \quad (7)$$

Donde Z_0 el cual corresponde a la impedancia intrínseca del medio, vendrá caracterizada por:

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (8)$$

Para el caso sin pérdidas notamos que:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

Luego tenemos que dicha impedancia intrínseca también puede ser expresada como:

$$\frac{V_0^+}{V_0^-} = Z_0 = \frac{-V_0^-}{I_0^-} \quad (10)$$

Es importante en lo que viene entender el concepto de impedancia de entrada Z_{in} que sera demostrado mas adelante, así como el funcionamiento de los adaptadores $\lambda/2$ y $\lambda/4$.

La Carta de Smith, o Diagrama de Smith, es una herramienta gráfica utilizada en ingeniería de radiofrecuencia y diseño de líneas de transmisión. Esta carta proporciona una representación visual de las impedancias en un sistema de transmisión de radiofrecuencia. Esta se construye y se utiliza a partir de:

- **Normalización de impedancias**: Normaliza las impedancias dividiendo cada valor de impedancia por la impedancia característica de la línea de transmisión utilizada. Esto crea impedancias normalizadas, que son adimensionales.

- **Ubicación en el Gráfico Polar:** Representa cada impedancia normalizada como un punto en el gráfico polar. La parte real se coloca en el eje horizontal (resistivo) y la parte imaginaria en el eje vertical (reactivo).

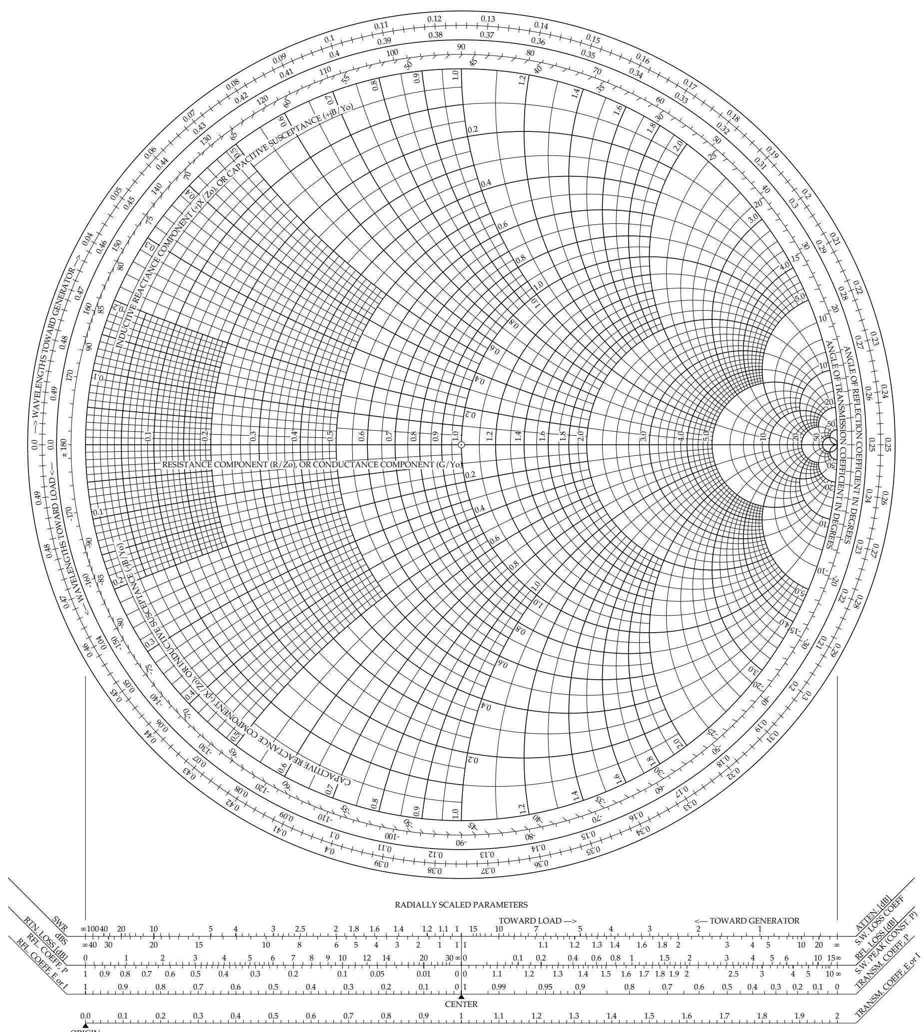
- **Círculos concéntricos en el gráfico**: Representan líneas de constante resistencia y reactancia normalizadas. Estos círculos ayudan a visualizar cambios en la impedancia a medida que varía la frecuencia.

- **Lineas radiales** Estas líneas representan ángulos constantes y se utilizan para medir el ángulo de la impedancia normalizada desde el eje resistivo.
- **Movimientos generador -plano carga** La carta Smith permite visualizar los movimientos que se realizan hacia el generador o hacia el eje, lo cual es muy util.

La Carta de Smith se construye a partir de impedancias en lugar de admitancias debido a que es más común trabajar con impedancias en el contexto de líneas de transmisión y sistemas de radiofrecuencia. Aun así se puede utilizar para admitancias dado que equivale a una rotación de 180°. Esta carta puede ser dificil de utilizar en un principio pero luego se vuelve intuitiva e incluso preferible por sobre otros métodos de resolución en el contexto de lineas.

The Complete Smith Chart

Black Magic Design



1. Demuestre que la impedancia de entrada de una linea sin perdidas de largo l, constante de fase β e impedancia característica Z_c, con una impedancia de carga Z_L, esta dado por:

$$Z_{in} = Z_c \left(\frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta l)} \right)$$

   (a) Sea la carga un corto-circuito obtenga el Z_{in} e interprete el resultado.
   (b) Sea la carga un circuito abierto obtenga el Z_{in} e interprete el resultado.
   (c) Se busca analizar la impedancia de entrada en la situación que $l = \lambda/2$ además interprete el resultado. Obtenga el coeficiente de reflexión de la carga.
   (d) Se busca analizar la impedancia de entrada en la situación que $l = \lambda/4$ además interprete el resultado. Obtenga el coeficiente de reflexión de la carga.

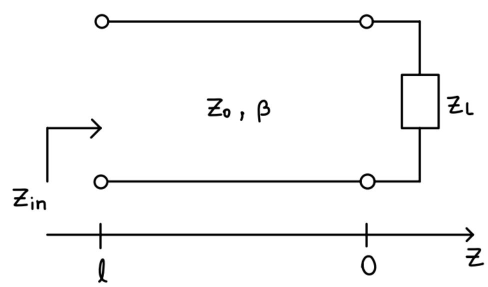


Figura 1: Esquema de la linea de transmisión con carga Z_L

Solución:

(a) Se realiza el análisis de la impedancias de entradas de una linea de transmisión terminadas en una carga Z_l es por esto que se considera la presencia de una onda incidente como reflejada a lo largo de la linea de transmisión. Se logra expresar tanto la corriente como el voltaje de la siguiente manera:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \tag{11}$$

$$I(z) = I^+ e^{-j\beta z} + I^- e^{j\beta z} \tag{12}$$

Luego el valor de impedancia considerando onda incidente y reflejada:

$$\frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-} = Z_c \tag{13}$$

En relación al sistema de referencia se tendrá que calculando voltaje y corriente donde se encuentra la impedancia (Es decir en z=0):

$$V(z = 0) = V^+ + V^- = V^+(1 + \Gamma_L) \tag{14}$$

Se utiliza que el coeficiente de reflexión en la carga $\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+}$. De manera análoga se tendrá que la corriente:

$$\begin{aligned} I(z = 0) = I^+ + I^- &= \frac{V^+}{Z_c} - \frac{V^-}{Z_c} && (15)\\ &= \frac{1}{Z_c}(V^+ - V^-) && (16)\\ &= \frac{V^+}{Z_c}(1 - \Gamma_l) && (17) \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$Z_L = \frac{V(z=0)}{I(z=0)} = \frac{V^+(1+\Gamma_L)}{\frac{V^+}{Z_c}(1-\Gamma_l)} = \frac{Z_c(1+\Gamma_l)}{(1-\Gamma_l)} \tag{18}$$

Por tanto el valor de la impedancia en la carga:

$$Z_L = \frac{Z_c(1+\Gamma_L)}{(1-\Gamma_L)} \tag{19}$$

Es de interés despejar el coeficiente de reflexión en la carga:

$$Z_L = \frac{Z_c(1+\Gamma_L)}{(1-\Gamma_L)} \tag{20}$$

$$Z_L(1-\Gamma_L) = Z_c(1+\Gamma_L) \tag{21}$$

$$Z_L - Z_L\Gamma_L = Z_c + Z_c\Gamma_L \tag{22}$$

$$Z_L - Z_c = Z_L\Gamma_L + Z_c\Gamma_L \tag{23}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \tag{24}$$

Si se evalúa la impedancia de entrada para una distancia arbitraria, es decir, z = l:

$$Z_{in} = \frac{V(z=l)}{I(z=l)} = \frac{V^+e^{j\beta l} + V^-e^{-j\beta l}}{\frac{1}{Z_c}(V^+e^{j\beta l} - V^-e^{-j\beta l})} \tag{25}$$

Se divide las expresiones por $\frac{1}{V^+}$ con lo que se obtiene:

$$Z_{in} = Z_c\left(\frac{e^{j\beta l} + \Gamma_l e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \Gamma_l e^{-j\beta l}}\right) \tag{26}$$

Es importante notar que el coeficiente de reflexión sigue estando asociado a la carga (Es decir que se encuentra evaluado en la carga), luego reemplazaremos este valor, con lo obtenido con anterioridad:

$$Z_{in} = Z_c\left(\frac{e^{j\beta l} + \left(\frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c}\right)e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \left(\frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c}\right)e^{-j\beta l}}\right) \tag{27}$$

$$= Z_c\left(\frac{\frac{e^{-j\beta l}(Z_l+Z_c) + (Z_l-Z_c)e^{-j\beta l}}{(Z_l+Z_c)}}{\frac{e^{-j\beta l}(Z_l+Z_c) - (Z_l-Z_c)e^{-j\beta l}}{(Z_l+Z_c)}}\right) \tag{28}$$

$$= Z_c\left(\frac{Z_l(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_c(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{Z_c(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_l(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}\right) \tag{29}$$

Luego se utilizan las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\frac{e^{aj} - e^{-aj}}{2j} = \sin(ax) \qquad \frac{e^{aj} + e^{-aj}}{2} = \cos(ax) \tag{30}$$

Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$Z_{in} = Z_c\left(\frac{Z_l(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_c(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{Z_c(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_l(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}\right) \tag{31}$$

$$= Z_c\left(\frac{Z_l 2\cos(\beta l) + 2jZ_c\sin(\beta l)}{Z_c 2\cos(\beta l) + 2jZ_l\sin(\beta l)}\right) \tag{32}$$

Dividendo ambas expresiones por:

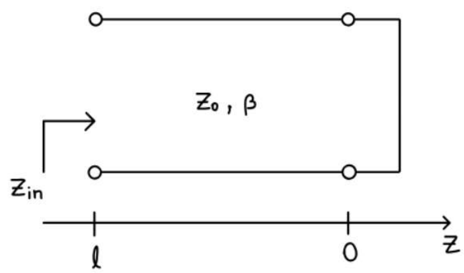
$$\frac{1}{2\cos(\beta l)} \tag{33}$$

Se tendrá finalmente que:

$$Z_{in} = Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_l \tan(\beta l)} \right) \tag{34}$$

Se obtiene la expresión de la impedancia de entrada para una distancia l arbitraria, expresión muy útil en este contexto y que se utilizara con mucha frecuencia dado que entrega bastante información para el análisis.

(b) Debido a que se busca la impedancia de entrada cuando esta sea un cortocircuito, se tendrá:



Dado que tenemos un cortocircuito luego la impedancia corresponderá a $Z_l = 0$, se reemplaza este valor en la impedancia de carga:

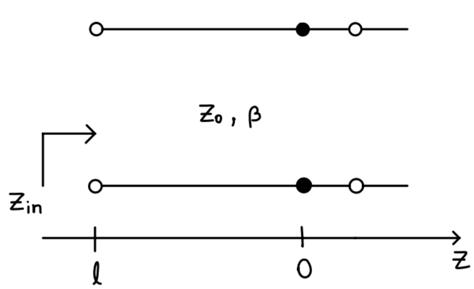
$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_l \tan(\beta l)} \right) && (35) \\ &= Z_c \left(\frac{0 + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + j0 \tan(\beta l)} \right) && (36) \\ &= jZ_c \tan(\beta l) && (37) \end{aligned}$$

Luego para el coeficiente de reflexión:

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} && (38) \\ &= \frac{-Z_c}{Z_c} && (39) \\ &= -1 && (40) \end{aligned}$$

Es decir que tenemos una reflexión total pero con una inversión de fase de $\pm\pi$.

(c) Similar a la situación anterior se tendrá que para un circuito abierto:



Dado que se tendrá un impedancia en abierto esta se puede entender como $Z_l \to \infty$ por tanto la impedancia de entrada:

$$Z_{in} = Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_l \tan(\beta l)} \right) \tag{41}$$

Con lo que dividiendo la expresión por $\frac{1}{Z_l}$ (Haremos uso del limite):

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_c \left(\frac{1 + j\frac{Z_c}{Z_l} \tan(\beta l)}{\frac{Z_c}{Z_l} + j \tan(\beta l)} \right) && (42) \\ &= Z_c \left(\frac{1+0}{0 + j\tan(\beta l)} \right) && (43) \\ &= -jZ_c \cot(\beta l) && (44) \end{aligned}$$

Luego el coeficiente de reflexión vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} && (45) \\ &= \frac{\frac{Z_l}{Z_l} - \frac{Z_c}{Z_l}}{\frac{Z_l}{Z_l + \frac{Z_c}{Z_l}}} && (46) \\ &= \frac{1-0}{1+0} && (47) \\ &= 1 && (48) \end{aligned}$$

Con lo que vemos que la onda se refleja totalmente, pero sin un cambio de fase.

(d) Se busca el evaluar la impedancia de entrada cuando l=$\frac{\lambda}{2}$, por tanto:

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_l \tan(\beta l)} \right) && (49) \\ &= Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan\left(\beta\frac{\lambda}{2}\right)}{Z_c + jZ_l \tan\left(\beta\frac{\lambda}{2}\right)} \right) && (50) \end{aligned}$$

Considerando que $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$.

$$\begin{aligned} Z_{in} =& Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\right)}{Z_c + jZ_l \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\right)} \right) && (51) \\ &= Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan(\pi)}{Z_c + jZ_l \tan(\pi)} \right) && (52) \\ &= Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c 0}{Z_c + jZ_l 0} \right) && (53) \\ &= Z_l && (54) \end{aligned}$$

Notamos que la impedancia de carga sera independiente de la impedancia intrínseca de la linea lo cual es muy relevante a considerar.

(e) Se realiza el análisis cuando $l = \frac{\lambda}{4}$

$$Z_{in} = Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right)}{Z_c + jZ_l \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right)} \right) \tag{55}$$

$$= Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{Z_c + jZ_l \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) \tag{56}$$

$$= Z_c \left(\frac{\frac{Z_l}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} + jZ_c}{\frac{Z_c}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} + jZ_l} \right) \tag{57}$$

$$= Z_c \left(\frac{jZ_c}{jZ_l} \right) \tag{58}$$

$$= \frac{Z_c^2}{Z_l} \tag{59}$$

Esta distancia es de suma importancia y útil en aplicaciones de microondas, dado que nos permite modificar el parámetros Z_c con tal de adaptar la linea y no tener reflexiones. (Recomiendo entender de buena manera este concepto).

2. Sea el valor de la carga $Z_L = 32$ y $Z_0 = 50$ (Linea que viene desde el generador), obtenga el valor de la impedancia caracteristica de la linea de adaptación (Z_c) para que el sistema se encuentre adaptado, además obtenga el coeficiente de reflexión e interprete el resultado obtenido. Si la impedancia tuviera una componente compleja, que podria suceder y como se solucionaria?

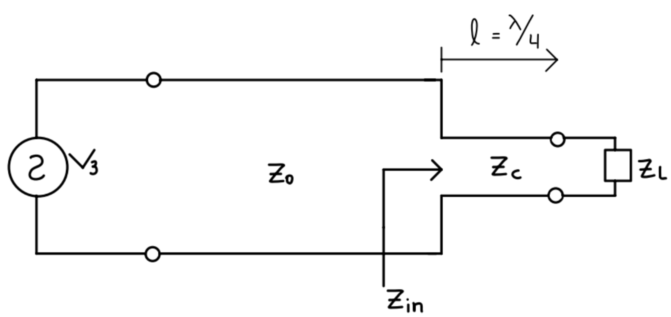


Figura 2: Linea de transmisión con adaptador $\lambda/4$

Solución:

(a) En base al esquema visto, se tendrá la presencia de un adaptador $\frac{\lambda}{4}$ que recordando su expresión:

$$Z_{in} = Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_l \tan(\beta l)} \right) \tag{60}$$

Se tendrá para l=$\frac{\lambda}{4}$ *(distancia desde la carga a donde queremos medir la impedancia de entrada)*:

$$Z_{in} = Z_c \left(\frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta \frac{\lambda}{4})}{Z_c + jZ_l \tan(\beta \frac{\lambda}{4})} \right) = \frac{Z_c^2}{Z_l} \tag{61}$$

Con lo que obtenemos una expresión que no depende de β ni de otros términos, por lo que se logra obtener el Z_c que necesitemos para una impedancia de carga Z_l, por tanto:

$$Z_c = \sqrt{Z_{in} Z_l} = \sqrt{50\ 32} = 40[\Omega] \tag{62}$$

Esta condición impuesta es debido a que se desea una impedancia de entrada de $Z_{in} = 50[\Omega]$ (Para que se logre ver desde el adaptador y que no existan reflexiones). Esto da como resultado una impedancia de característica de linea de $Z_c = 40[\Omega]$. Luego si queremos obtener el coeficiente de reflexión en donde se mide Z_{in} se obtiene:

$$\Gamma = \frac{(Z_l - Z_0)}{(Z_l + Z_0)} = \frac{50 - \frac{Z_c^2}{Z_l}}{(50 + \frac{Z_c^2}{Z_l})} = \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0 \tag{63}$$

Es decir que la linea se encuentra totalmente adaptada, lo cual es súper útil dado que no tendremos las reflexiones que pueden producir inconvenientes. Se tendrá que este procedimiento es válido para impedancias con solo componente real, dado que no es posible el obtener un $Z_c \in \mathbb{C}$, dado que no es posible implementarlo en la vida real, la solución la veremos en problemas posteriores.