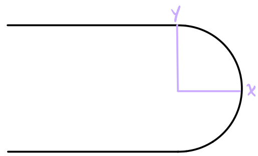
P1 Como ya puede ser costumbre, lo primero que debemos hacer es fijar el sistema de referencia.



Para obtener el campo eléctrico, usamos el principio de superposición. Para ello, dividimos el cable en 3: 2 cables rectos semi-infinitos y 1 semicircunferencia. La idea será calcular cada trozo por separado y luego sumar.

Como tenemos una distribución de cargas continuas, el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dq,$$

donde

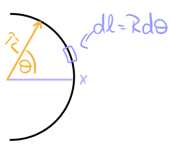
→ ε_0: permitividad del vacío, cte conocida $\varepsilon_0 \approx 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}$ ← Faradio ← metro

→ $\vec{r}$: vector que indica el punto de observación / donde están calculando el campo.

→ $\vec{r}\,'$: vector que indica dónde está la carga

→ dq: diferencial de carga.

<u>Semicircunferencia</u>: $\vec{r} = 0$, $\vec{r}\,' = R\hat{r}$, $dq = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$



$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{0-R\hat{r}}{|0-R\hat{r}|^3}\,\lambda R\,d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-\lambda R^2}{R^3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{r}\,d\theta$$

Como $\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$, $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{r}\,d\theta = \left[\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = [1-(-1)]\hat{x} = 2\hat{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\hat{x}}$$

Cables rectos: $\vec{r} = 0$ $\quad \vec{r}\,' = \pm R\hat{y} + x\hat{x}$ $\quad \rightarrow$ el que tiene $+R\hat{y}$, es el cable superior
$-R\hat{y}$, es el cable inferior

$dq = \lambda dx$

$$\vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{-R\hat{y} - x\hat{x}}{|-R\hat{y} - x\hat{x}|^3}\,\lambda dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{R\hat{y} - x\hat{x}}{|R\hat{y} - x\hat{x}|^3}\,\lambda dx \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \cancel{-\lambda R\hat{y}\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}} - \lambda\hat{x}\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{(R^2+x^2)^{3/2}} + \cancel{\lambda R\hat{y}\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}} - \lambda\hat{x}\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{(R^2+x^2)^{3/2}} \right\}$$

$u = x^2 + R^2$
$du = 2x\,dx$

$$= \frac{-2\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-\lambda\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0}\left[-(R^2+x^2)^{-1/2}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\lambda\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0}\left(R^{-1} - 0\right) = \frac{\lambda\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

El campo total está dado por:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$$

P2 En esta pregunta, necesitamos el campo que genera uno de los alambres

$$\vec{r} = x\hat{x} \quad \vec{r}\,' = x'\hat{x} \qquad dq = \lambda_1 dx$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{(x-x')\hat{x}\lambda_1 dx'}{(x-x')^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^{x-L} \frac{-u\,\hat{x}\lambda_1 du}{u^3} = \frac{-\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^{x-L} u^{-2}du = \frac{-\lambda_1\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{u^{-1}}{-1}\Big|_x^{x-L}$$

$u = x - x'$

$du = -dx'$

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right]$$

Para la fuerza, recordamos que $\vec{F} = q\vec{E}$, por lo que infinitesimalmente:

$$d\vec{F} = dq\,\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = \int \vec{E}\,dq$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = \int_{L+d}^{2L+d} \vec{E}_1\,\lambda_2 dx = \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L+d}^{2L+d}\left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(x-L) - \ln(x)\Big]_{L+d}^{2L+d}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{1\to 2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{L+d}{d}\right) - \ln\left(\frac{2L+d}{L+d}\right)\right]\hat{x}$$

P3 Queremos obtener el campo en el eje del disco

$$\vec{r} = z\hat{z} \quad , \quad \vec{r}' = r\hat{r} \quad , \quad dq = \sigma(r)\, r\, d\theta\, dr$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{z\hat{z} - r\hat{r}}{|z\hat{z} - r\hat{r}|^3}\,\sigma(r)\, r\, d\theta\, dr = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - r\hat{r}}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,\frac{r^3}{R^2}\, d\theta\, dr$$

Inmediatamente podemos ver que el término con $\hat{r}$ es nulo, pues $\int_0^{2\pi} \hat{r}\, d\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0 z\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r^3\, d\theta\, dr}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 z\hat{z}}{2\varepsilon_0 R^2}\int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{(u-z^2)\, du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma_0 z\hat{z}}{2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_{z^2}^{R^2+z^2} u^{-1/2}\, du - z^2\int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-3/2}\, du\right]$$

$u = r^2 + z^2$

$du = 2r\,dr$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0 z\hat{z}}{2\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2} - z^2\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right]_{z^2}^{z^2+R^2} = \frac{\sigma_0 z\hat{z}}{2\varepsilon_0 R^2}\left[2\sqrt{z^2+R^2} - 2z + 2z^2\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0 z\hat{z}}{\varepsilon_0 R^2}\left(\sqrt{R^2+z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Con esto, la fuerza que siente la partícula es:

$$\vec{F} = -\frac{\sigma_0 q z}{\varepsilon_0 R^2}\left(\sqrt{R^2+z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z}$$