P1 a) Usamos el principio de superposición, para obtener por separado el potencial electrostático en el vértice del cono, que genera el cono y el anillo.

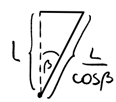
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Anillo: Usamos cilíndricas con origen en el vértice del cono

$$\vec{r}=0 \qquad \vec{r}'=a\hat{r}-b\hat{z} \qquad dq=\lambda dl=\lambda a d\varphi$$

$$V(b\hat{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda a\, d\varphi}{|b\hat{z}-a\hat{r}|} = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(b^2+a^2)^{1/2}} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 (b^2+a^2)^{1/2}}$$

Cono: Usamos esféricas



$$\vec{r}=0 \qquad \vec{r}'=r\hat{r} \qquad dq=\sigma r\sin\beta\, dr\, d\phi$$

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{L/\cos\beta}\frac{\sigma r\sin\beta\, dr\, d\phi}{|0-r\hat{r}|} = \frac{\sigma\sin\beta}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{L/\cos\beta}\frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}dr = \frac{\sigma L\sin\beta}{2\varepsilon_0\cos\beta} = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\tan\beta$$

$$\Rightarrow V_{tot} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\lambda a}{\sqrt{b^2+a^2}} + \sigma L\tan\beta\right]$$

Ojo: Usamos sistemas de coordenadas distintos! ¿Está bien?
Les propongo calcular V_{anillo} en esféricas y comprobar que está bien.

b) Para relacionar σ con velocidad, la idea es que

$$\sigma \to \text{potencial} \to \text{trabajo} \to \text{energía} \to \text{velocidad}$$

El trabajo que ejerce la configuración sobre la partícula, para moverla desde A hasta B es:

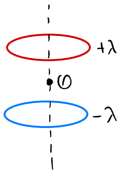
$$W_{AB} = \int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0(V_A - V_B) = -q_0\Delta V$$

$$W_{AB} = q_0\left(V_{tot} - \cancel{V(\infty)}^{\,0}\right) = \frac{q_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sigma L \tan\beta\right]$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{L\tan\beta}\left[\frac{\varepsilon_0 m v_f^2}{q_0} - \frac{\lambda a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

P2 a) Usando el principio de superposición, calculemos el potencial de cada anillo por separado.

Fijamos el sist. de ref. entre los anillos y en el eje de los anillos



Para el anillo con $+\lambda$: $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = a\hat{r} + L\hat{z}$, $dq = \lambda dl = \lambda a d\theta$

$$V_+(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{|z\hat{z} - a\hat{r} - L\hat{z}|} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+(z-L)^2}}$$

Análogamente para $V_-(z) = -\dfrac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+(z+L)^2}}$

$$\Rightarrow V_{tot} = V_+ + V_- = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+(z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(z+L)^2}}\right]$$

b) Para mover a la partícula desde $L\hat{z}$ hasta $-L\hat{z}$, se le debe ejercer un trabajo

$$W = -q_0\left(V(-L) - V(L)\right)$$

$$= -\frac{\lambda a q_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+(-L-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(-L+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(L-L)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+(L+L)^2}}\right]$$

$$= -\frac{\lambda a q_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+4L^2}} - \frac{1}{a}\right]$$

P3| Por la simetría del problema, el potencial sólo depende de la distancia entre las placas (x):

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

La sol. más general es $V(x) = C_1 + C_2 x - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2}$

Con $V(x=0) = V_0$ y $V(x=d) = 0$

$$V_0 = C_1 \quad \text{y} \quad 0 = C_1 + C_2 d - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{d^2}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{d}{2} - \frac{V_0}{d}$$

$$\Rightarrow V(x) = V_0 + \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{d}{2} - \frac{V_0}{d}\right)x - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2}$$

$$\vec{E}(x) = -\nabla V = \left\{\frac{V_0}{d} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{d}{2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}x\right\}\hat{x} = \left\{\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(2x-d) + \frac{V_0}{d}\right\}\hat{x}$$