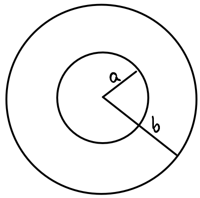
P1



En primer lugar, por la simetría esférica podemos decir que el campo eléctrico es de la forma:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

a) Identificamos que hay 3 regiones. Iremos desde el centro de la esfera hacia fuera.

$r<a$ Conocemos la densidad de carga, por lo que podemos usar la forma integral de Gauss. Para ello, nos damos una superficie $\partial\Omega$, de radio $r \in (0,a)$ (o $r<a$).

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$$

es sólo notación para un dif. de volumen

donde $d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$ en esféricas y $Q_{enc} = \int \rho(\vec{r}')d^3r'$

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = E(r) r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{\text{Integral del ángulo sólido} = 4\pi} = E(r) 4\pi r^2$$

(vale la pena aprendérsela)

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho_0 \, r'^2 \sin\theta' \, dr' d\theta' d\phi' = \rho_0 4\pi \frac{r^3}{3}$$

$$\text{Gauss} \Rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0 4\pi \frac{r^3}{3} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r}}$$ para $r<a$.

El potencial se puede obtener con

① $V(A) - V(B) = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$ ② $\vec{E} = -\nabla V$

Lo haré con ②, porque en aux lo hicimos con ①

$$\vec{E} = -\nabla V \iff \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \quad \left(V = V(r),\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0\right) \implies \frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + Cte = -V(r<a)$$

Como el potencial es continuo:

$$V(r<a)\big|_{r=a} = V(a\leq r\leq b)\big|_{r=a} \iff -\frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0} - cte = -\frac{K}{6}a^2 \implies cte = \frac{K}{6}a^2 - \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0}$$

$$\implies \boxed{V(r<a) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{Ka^2}{6} + \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0}}$$

$a\leq r\leq b$ | Conocemos el potencial, así que le tomamos el gradiente

$$\vec{E} = -\nabla V \iff \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{K}{6}r^2\right)\hat{r} \iff \boxed{\vec{E} = \frac{Kr}{3}\hat{r}} \quad \text{para } a\leq r\leq b$$

$r>b$ | No conocemos nada. Pero sabemos que ya estamos fuera de la configuración de cargas, por lo que en esta región no hay cargas. Es decir, podemos resolver:

① $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ ② $\nabla^2 V = 0$, porque $\rho(r>b) = 0$

Vamos de la forma ①

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} \implies \frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = 0 \implies r^2 E_r = \overset{cte}{C} \implies E_r = \frac{C}{r^2} \implies \vec{E} = \frac{C}{r^2}\hat{r}$$

Para encontrar la cte usamos la continuidad del potencial.

porque es una esfera.

$$V(r>b) - \cancel{V(r\to\infty)}^{\,0} = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} \iff V(r>b) = \int_r^\infty \frac{C}{r'^2}\,dr' = C\left.\frac{-1}{r'}\right|_r^\infty = \frac{C}{r}$$

$$V(r>b)\big|_{r=b} = V(a\leq r\leq b)\big|_{r=b} \implies \frac{C}{b} = -\frac{Kb^2}{6} \implies C = -\frac{Kb^3}{6}$$

$$\implies \boxed{\vec{E} = -\frac{Kb^3}{6r^2}\hat{r}} \quad \boxed{V = -\frac{Kb^3}{6r}} \quad \text{para } r>b$$

b) Para $\rho(a<r<b)$, usamos

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \iff \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \iff \frac{\varepsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Kr^3}{3}\right) = \rho \iff K\varepsilon_0 = \rho$$

Ahora vamos por σ_1 y σ_2

Quedará de propuesto hacerlo con condiciones de borde, cuando aprendan esto en cátedra.

Como conocemos el campo en todo el espacio, podemos usar Gauss.

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_{enc} \iff \varepsilon_0 E(r)4\pi r^2 = Q_{enc}$$

Si $r\in(a,b)$, $Q_{enc} = \iiint \rho(r<a)\,dV + \iint \sigma_1\,dS + \iiint \rho(a<r<b)\,dV$

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho_0\, r'^2\sin\theta'dr'd\theta'd\phi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_1\, a^2\sin\theta'd\theta'd\phi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{r}\rho(a<r'<b)\, r'^2\sin\theta'dr'd\theta'd\phi'$$

$$= \rho_0\, 4\pi\frac{a^3}{3} + \sigma_1\, 4\pi a^2 + K\varepsilon_0\, 4\pi\frac{(r^3-a^3)}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \left[\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} + \frac{\sigma_1 a^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} + \frac{K}{3}\frac{(r^3-a^3)}{r^2}\right]\hat{r}$$

Ya habíamos visto que $\vec{E} = \frac{Kr}{3}\hat{r}$ en esta zona, así que igualando:

$$\cancel{\frac{Kr}{3}} = \left(\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1 a^2}{\varepsilon_0} - \frac{Ka^3}{3}\right)\frac{1}{r^2} + \cancel{\frac{Kr}{3}} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\varepsilon_0}{a^2}\left(\frac{Ka^3}{3} - \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{a}{3}(K\varepsilon_0 - \rho_0)$$

Para σ_2, nos damos un radio $r>b$:

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho(r<a)\, r'^2\sin\theta'dr'd\theta'd\phi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_1\, a^2\sin\theta'd\theta'd\phi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b}\rho(a<r<b)\, r'^3\sin\theta'dr'd\theta'd\phi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_2\, b^2\sin\theta'd\theta'd\phi'$$

$$Q_{enc} = \rho_0 \, 4\pi \frac{a^3}{3} + \sigma_1 4\pi a^2 + K\varepsilon_0 4\pi \frac{(b^3-a^3)}{3} + \sigma_2 4\pi b^2$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \left[\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma_1 a^2 + \sigma_2 b^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{K}{3}(b^3-a^3) \frac{1}{r^2} \right] \hat{r}$$

Sabemos que $\vec{E} = -\frac{Kb^3}{6r^2}\hat{r}$ en esta región.

$$\frac{-Kb^3}{6\cancel{r^2}} = \left(\frac{\cancel{\rho_0} a^3}{3\cancel{\varepsilon_0}} + \frac{a^3(\cancel{K\varepsilon_0} - \cancel{\rho_0})}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 b^2}{\varepsilon_0} + \frac{Kb^3}{3} - \frac{\cancel{K}a^3}{\cancel{3}} \right) \cancel{\frac{1}{r^2}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0}{b^2} \left[-\frac{Kb^3}{6} - \frac{Kb^3}{3} \right] = -\frac{K\varepsilon_0 b}{2}$$

P2 En este problema, la idea es comparar la energía de una configuración y la otra. La diferencia en estas energías la relacionamos con la energía cinética del asteroide.

Pensando en la expansión multipolar, notamos que cada planeta es de carga neutra por lo que el término monopolar es nulo. Calculemos el momento dipolar, y con ello la energía de cada configuración.

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,' d^3r' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{R} +\rho_0 r'\hat{r}'\, r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi' + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{R} -\rho_0 r'\hat{r}' \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

$$= \rho_0 \frac{R^4}{4}\left\{ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \hat{r}' \sin\theta' d\theta' d\phi' - \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \hat{r}' \sin\theta' d\theta' d\phi' \right\}$$

Como $\hat{r}' = \sin\theta' \cos\phi' \hat{x} + \sin\theta' \sin\phi' \hat{y} + \cos\theta' \hat{z}$ y $\int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = 0$

$$\vec{p} = \rho_0 \frac{R^4}{4}\left\{ \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} \sin\theta' \cos\theta' d\theta' - \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta' \cos\theta' d\theta' \right\} \hat{z}$$

$u = \sin\theta$
$du = \cos\theta\, d\theta$

$$= \rho_0 \frac{R^4}{4} 2\pi \hat{z} \left\{ \int_0^1 u\, du - \int_1^0 u\, du \right\}$$

$$= \pi \rho_0 \frac{R^4}{2} \hat{z} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} \right\} = \frac{\pi \rho_0 R^4}{2} \hat{z}$$

Con esto, podemos ver que el campo eléctrico que genera uno de los planetas está dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}]}{r^3}$$

Entonces, si ambos planetas tienen su hemisferio norte con $+\rho_0$, pensamos en la configuración $\begin{matrix}\uparrow\\ \uparrow\end{matrix}$, si el de arriba tiene $-\rho_0$ en su hemisferio norte $\begin{matrix}\downarrow\\ \uparrow\end{matrix}$

La energía del sistema está dada por $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$\downarrow$
dipolo expuesto al campo $\vec{E}$

$U_{\uparrow\uparrow} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ $\qquad$ $U_{\downarrow\uparrow} = \vec{p}\cdot\vec{E}$

$\Rightarrow \Delta U = K_{asteroide} \Leftrightarrow 2\vec{p}\cdot\vec{E} = K_{asteroide}$ $\qquad$ $p_0 \equiv \dfrac{\pi\rho_0 R^4}{2} \Rightarrow \vec{p} = p_0\hat{z}$

$$K_{asteroide} = 2(p_0\hat{z})\cdot\left\{\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[3(\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}-\hat{z}]}{r^3}\right\}$$

$$= \frac{p_0^2\hat{z}\cdot[3\cos\theta\,\hat{r}-\hat{z}]}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p_0^2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\cos^2\theta - 1\right]$$

Nos falta evaluar esto en la posición del dipolo de arriba: $r=d$ y $\theta=0$

$$\underbrace{K_{asteroide}}_{\frac{1}{2}m v_{asteroide}^2} = \frac{2p_0^2}{2\pi\varepsilon_0 d^3} = \frac{\pi\rho_0^2 R^8}{4\varepsilon_0 d^3} \Rightarrow \boxed{v_{asteroide} = \frac{\rho_0 R^4}{2d}\sqrt{\frac{\pi}{m\varepsilon_0 d}}}$$

P3 Es importante recordar que $d\vec{p}' = \vec{P}\, d^3r$

momento dipolar

Polarización

Una interpretación de la polarización corresponde a pensarla como la densidad volumétrica del momento dipolar, en una posición dada.

Potencial de un dipolo
$$V_{\vec{p}'}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}'\|^3}$$

Podemos tomar un diferencial del potencial del dipolo, e integrar

$$dV_{\vec{p}'}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\vec{p}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}'\|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}_p)\, d^3r_{\vec{p}'} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}'\|^3}$$

Es muy similar a cuando teníamos el $\vec{r}'$ que nos indicaba la posición de la carga, ahora $\vec{r}_{\vec{p}}'$ nos indica la posición del dipolo

$$V_{\vec{p}'}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{P}(\vec{r}_p') \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}'\|^3} d^3r_{\vec{p}'}$$

$$\vec{P} = P_0\, \hat{z} \Rightarrow V(\vec{r}') = \frac{P_0\, \hat{z}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\int \frac{\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}'}{\|\vec{r}' - \vec{r}_{\vec{p}}'\|^3} d^3r_{\vec{p}'}}_{\vec{I}(\vec{r}')}$$

(notar que dejamos de escribir $V_{\vec{p}'}$)

La última integral no es fácil de resolver, ya que $\vec{r}'$ es un punto cualquiera del espacio. Sin embargo, podemos obtenerla indirectamente, a partir de un caso conocido.

Imaginemos que tenemos una esfera aislante con $\rho(r) = \rho_0$, de radio R. Como hay simetría esférica, con Gauss obtenemos

I) $r < R$
$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\, \hat{r}$$

II) $r > R$
$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{R^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}\, \hat{r}$$

Pero por definición del campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} dq$$

$$dq = \rho_0\, dV' = \rho_0\, d^3r' \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}') = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{(\vec{r}' - \vec{r}'')}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|^3} d^3r'$$

nos aparece la integral que buscamos!

I) $r<R$ $\quad \frac{P_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\vec{I}(r<R) \Rightarrow \vec{I}(r<R) = \frac{4\pi r}{3}\hat{r}$

II) $r>R$ $\quad \frac{R^3 P_0}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\vec{I}(r>R) \Rightarrow \vec{I}(r>R) = \frac{4\pi R^3}{3r^2}\hat{r}$

Basta reemplazar y tenemos el potencial ($\hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta$

$$\therefore V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{P_0 r}{3\varepsilon_0}\cos\theta & r<R \\ \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta & r>R \end{cases}$$

b) El campo eléctrico lo obtenemos con $\vec{E} = -\nabla V$

Gradiente en esféricas $\quad \nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$

I) $r<R$ $\quad \vec{E}(r<R) = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta) + 0\right)$

$$= \frac{-P_0}{3\varepsilon_0}\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

II) $r>R$ $\quad \vec{E}(r>R) = \frac{-P_0 R^3}{3\varepsilon_0}\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^{-2}\cos\theta) + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^{-2}\cos\theta) + 0\right)$

$$= \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r^3}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{1}{r^3}\sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{P_0}{3\varepsilon_0}\left(-\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) & r<R \\ \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) & r>R \end{cases}$$

c) Conocemos el vector de polarización, por lo que usamos

$$\sigma_p = (\vec{P}\cdot\hat{n})_{r=R} \quad \text{y} \quad \rho_p(r) = -\nabla\cdot\vec{P}$$

$\hat{n} = \hat{r} \Rightarrow \sigma_p = P_0(\hat{z}\cdot\hat{r})|_{r=R} = P_0\cos\theta$; $\quad \rho_p(r) = -\nabla\cdot\vec{P} = -P_0\nabla\cdot(\hat{z}) = 0$

Finalmente : $d\vec{p} = \vec{P}\,d^3r \Rightarrow \vec{p} = \int_V \vec{P}\,d^3r = P_0\hat{z}\underbrace{\int_V d^3r}_{\text{Volumen de la esfera}} = \frac{4\pi}{3}R^3 P_0\hat{z}$