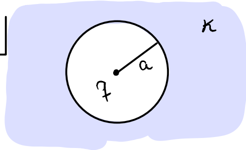
P1



La carga está en el centro de la esfera, por lo que:

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r} \qquad \text{y} \qquad \vec{D} = D(r)\,\hat{r}$$

a) Usamos Gauss generalizado: $\oiint_{\partial\Omega} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{f\,enc}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (D(r)\hat{r})\cdot(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}) = D(r)\, 4\pi r^2 \qquad Q_{fenc} = q \leftarrow \text{Única carga libre} \qquad \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{r}$$

El campo eléctrico lo obtenemos con $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D} = \frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\vec{D}$

$$\Rightarrow \vec{E}(r<a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} \qquad \vec{E}(r>a) = \frac{q}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

$$V(r>a) - \underbrace{\cancel{V(\infty)}}_{0 \text{ por simetría esférica}} = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q\,dr'}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r'^2} = \frac{q}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$V(r<a) - V(a) = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^a \frac{q\,dr'}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Nos falta $V(a)$, que lo obtenemos de $V(r>a)$

$$V(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\kappa a} \qquad \Rightarrow V(r<a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{\kappa a}\right) \qquad V(r>a) = \frac{1}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

b) El vector de polarización está dado por $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{P}(r<a) \overset{\text{porque estamos en el vacío}}{=} 0 \qquad \vec{P}(r>a) = \frac{\kappa - 1}{4\pi\kappa}\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\rho_p(r) = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P_r)}{\partial r} = 0 \qquad \sigma_p = (\vec{P}\cdot\underbrace{\hat{n}}_{-\hat{r}})\Big|_{r=a} = \frac{\kappa - 1}{4\pi\kappa}\frac{q}{a^2}\,\hat{r}\cdot(-\hat{r}) = \frac{(1-\kappa)q}{4\pi\kappa a^2}$$

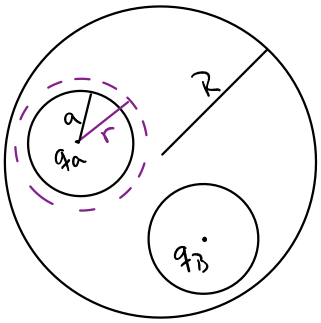
Con esto, La carga total es:

$$Q_{tot} = q + \iint \sigma_p \, dS + \iiint \rho_p \, dV = q + \frac{(1-\chi)q}{4\pi \chi a^2}(4\pi a^2) = q + \frac{(1-\chi)}{\chi} q = \frac{q}{\chi}$$

P3 a) Dado que la esfera es un conductor, podemos decir que:

"Las cargas del conductor se distribuyen de forma que el campo dentro del conductor sea nulo."

Veamos lo que quiere decir esto. Nos damos una superficie gaussiana esférica de radio $r \gtrsim a$ ($\gtrsim$ quiere decir mayor estricto, pero cercano).



Con esta superficie estamos dentro del conductor, por lo que el campo es cero. Con Ley de Gauss, podemos concluir que la carga encerrada es cero.

$$\oint_S \cancelto{0}{\vec{E}} \cdot ds = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{enc} = 0$$

Ahora, podemos decir que en las paredes de la cavidad de radio a, debe haber una carga total $-q_a$. Además, esta carga se distribuye uniformemente en las paredes. Así:

$$\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2} \begin{array}{l} \to \text{carga} \\ \to \text{área de la superficie} \end{array}$$

De forma análoga, para b:

$$\sigma_b = \frac{-q_b}{4\pi b^2}$$

Hay algo importante que no mencionamos antes. Tal como la carga de la cavidad hace que en las paredes de la cavidad se distribuyan cargas, esto último hace que cargas en la superficie externa del conductor se distribuyan. Esto en consecuencia de inducción.

De esta forma, en la superficie exterior se debe distribuir las cargas totales de las superficies de las cavidades, pero con signo opuesto

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

b) El campo fuera del conductor lo podemos obtener con la Ley de Gauss, ya que por simetría esférica, el campo sólo depende de la distancia al conductor y apunta en la dirección radial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Consideraremos una superficie esférica con $r > R$

La carga encerrada es $q_a + q_b$. Lo podemos ver directamente con el hecho de que el conductor es neutro y sólo quedan las cargas de las cavidades.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \iff \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r} = \frac{q_a+q_b}{\varepsilon_0}$$

$$\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$$

$$E(r)\, r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{4\pi} = \frac{q_a+q_b}{\varepsilon_0} \iff E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_a+q_b}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_a+q_b}{r^2}\hat{r}} \quad \text{para } r > R$$

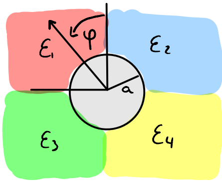
c) El campo dentro de cavidad es generado por una carga puntual:

$$\boxed{\vec{E}_a(\vec{r}_a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_a}{r_a^2}\hat{r}_a} \qquad \boxed{\vec{E}_b(\vec{r}_b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_b}{r_b^2}\hat{r}_b}$$

d) La fuerza que siente una carga producto de la otra es cero. Esto es porque el conductor de cierta forma corta la comunicación entre las cavidades.

e) Sólo cambia σ_R y el campo en el exterior, el resto se mantiene igual.

P3



Usamos coordenadas cilíndricas, tal que el eje $\hat{z}$ coincide con el eje del cilindro y sale de la página.

Sabemos que dentro de un conductor el campo eléctrico es nulo.

Por la condición de borde de las componentes tangenciales: $E_{1t} = E_{2t}$. Aplicando esto en las separaciones entre los medios, notamos que el campo eléctrico no cambia según el medio, con esto,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}_i}{\varepsilon_i} \quad (\star) \Rightarrow \vec{D} \text{ es distinto en cada medio} \Rightarrow \text{depende del ángulo } \varphi \text{ de cilíndricas}$$

Con Gauss generalizado:

$$\iint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{f\,enc} \Leftrightarrow \iint_{S_1} \vec{D}_1\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2\cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{D}_3\cdot d\vec{S}_3 + \iint_{S_4} \vec{D}_4\cdot d\vec{S}_4 = Q_{f\,enc}$$

La simetría del problema nos dice que $\vec{D} = D(r,\varphi)\hat{r}$ y $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. El módulo del campo eléctrico <u>no</u> depende de φ, por la condición de borde $E_{1t} = E_{2t}$. En primera instancia, no podemos sacar los $\vec{D}$ de las integrales, pero por $(\star)$ podemos reemplazarlos por $\varepsilon_i \vec{E}$

integramos sólo hasta L en lugar de ∞, porque diverge la integral. Al final, deberíamos tomar $L\to\infty$.

$$\Rightarrow \int_0^L\int_0^{\pi/2} (\varepsilon_1 E(r)\hat{r})\cdot(r\,d\varphi\,dz\,\hat{r}) + \int_0^L\int_{\pi/2}^{\pi} (\varepsilon_3 E(r)\hat{r})\cdot(r\,d\varphi\,dz\,\hat{r}) + \int_0^L\int_{\pi}^{3\pi/2} (\varepsilon_4 E(r)\hat{r})\cdot(r\,d\varphi\,dz\,\hat{r}) + \int_0^L\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\varepsilon_2 E(r)\hat{r})\cdot(r\,d\varphi\,dz\,\hat{r}) = Q_{f\,enc}$$

$$E(r)\varepsilon_1 \frac{\pi}{2} Lr + E(r)\varepsilon_2 \frac{\pi}{2} Lr + E(r)\varepsilon_3 \frac{\pi}{2} LR + E(r)\varepsilon_4 \frac{\pi}{2} LR = \int_0^L\int_0^{2\pi} \sigma\, r\,d\varphi\,dz$$

$$\frac{\pi}{2} Lr\,E(r)\left[\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\right] = \sigma\, 2\pi Lr \Rightarrow E(r) = \frac{4\sigma}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}}\hat{r}}, \text{ con } \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}, \text{ para } r>a, \quad (\vec{E}(r<a)=0 \text{ al ser conductor}).$$

No queda L, así que no juega un rol.

b) Para las densidades de cargas polarizadas necesitamos el vector de polarización.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \Rightarrow \vec{P}_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)\frac{\sigma}{\bar{\varepsilon}}\hat{r}$$

$$\rho_{p,i} = -\nabla \cdot \vec{P}_i = -\frac{1}{r}\frac{\partial (r P_r)}{\partial r} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\bar{\varepsilon}}\frac{\sigma}{r}$$

$$\sigma_{b,i} = (\vec{P}_i \cdot \hat{n})\Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_0}{\bar{\varepsilon}}\sigma\,(\hat{r}\cdot(-\hat{r})) = \frac{\sigma(\varepsilon_0 - \varepsilon_i)}{\bar{\varepsilon}}$$

En las superficies que separan a los medios, no hay densidades superficiales, ya que esas normales son perpendiculares a la dirección de $\vec{P} \Rightarrow \hat{r}\cdot\hat{n} = 0$.

c) El vector desplazamiento está dado por

$$\vec{D}_i = \varepsilon_i \vec{E} = \frac{\varepsilon_i \sigma}{\bar{\varepsilon}}\hat{r}$$