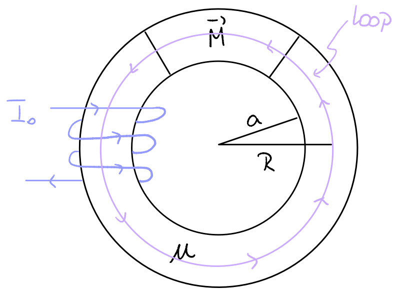
P1 Tomando un loop tal que $d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}$ y reconociendo que habrán dos campos $\vec{H}$ (1 para la zona con magnetización y otro para la zona con permeabilidad μ:



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H(r,\theta)\hat{\theta}\, r d\theta \hat{\theta} = \int_0^{2\pi - l/r} H_1(r) r d\theta + \int_{2\pi - l/r}^{2\pi} H_2(r) r d\theta$$

$$= H_1(r)(2\pi r - l) + H_2(r)\, l$$

Como la corriente que estamos encerrando está entrando a la página y la normal de nuestro loop sale de la página: $I_{f\,enc} = -NI_0$

$$\Rightarrow H_1(r)(2\pi r - l) + H_2(r) l = -NI_0 \quad (\star)$$

Sabemos que $B_{1n} = B_{2n}$, por lo que nos conviene expresar $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ en términos de $\vec{B}$:

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{\mu}\vec{B}_1 \quad \wedge \quad \vec{H}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2 - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2 - M_0\hat{\theta}$$

$$B_1(r) = \mu H_1(r) \quad \wedge \quad B_2(r) = \mu_0 (H_2(r) + M_0) \quad , \quad B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_1(r) = B_2(r)$$

$$H_1(r) = \frac{\mu_0}{\mu}(H_2(r) + M_0) \quad \wedge \quad H_2(r) = \frac{\mu}{\mu_0} H_1(r) - M_0 \quad (*)$$

$$(*) \to (\star) : \quad \frac{\mu_0}{\mu}(H_2(r) + M_0)(2\pi r - l) + H_2(r) l = -NI_0 \iff H_2(r)\left[\frac{\mu_0}{\mu}(2\pi r - l) + l\right] = -\frac{\mu_0}{\mu} M_0 (2\pi r - l) - NI_0$$

$$H_1(r)(2\pi r - l) + \left[\frac{\mu}{\mu_0} H_1(r) - M_0\right] l = -NI_0 \iff H_1(r)\left[(2\pi r - l) + \frac{\mu}{\mu_0} l\right] = M_0 l - NI_0$$

Zona con μ

$$\to \vec{H}_1 = \frac{M_0 l - NI_0}{(2\pi r - l) + (\mu/\mu_0) l}\,\hat{\theta}$$

$$\to \vec{B}_1 = \frac{\mu (M_0 l - NI_0)\hat{\theta}}{(2\pi r - l) + (\mu/\mu_0) l}$$

$$\to \vec{M}_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\left(\frac{M_0 l - NI_0}{(2\pi r - l) + (\mu/\mu_0) l}\right)\hat{\theta}$$

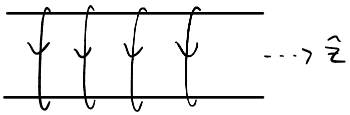
Zona con $\vec{M} = M_0\hat{\theta}$

$$\to \vec{H}_2 = -\frac{\left[(\mu_0/\mu) M_0 (2\pi r - l) + NI_0\right]}{(\mu_0/\mu)(2\pi r - l) + l}\,\hat{\theta}$$

$$\to \vec{B}_2 = -\mu\frac{\left[(\mu_0/\mu) M_0 (2\pi r - l) + NI_0\right]}{(\mu_0/\mu)(2\pi r - l) + l}\,\hat{\theta}$$

$$\to \vec{M} = M_0\hat{\theta}$$

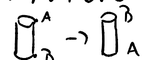
P2



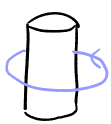
a) Ley de Ampère: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

Simetría $\vec{B} = \vec{B}(\rho)$

Para ver la dirección, podemos ver 2 cosas:

1) Si invertimos la dirección de la corriente $(\vec{J} \to -\vec{J})$, entonces $B_\rho \to -B_\rho$ (se puede ver directo desde el potencial vector). Pero invertir la corriente es lo mismo que girar el solenoide  y notaríamos que la componente radial del campo no cambia. La única solucion posibe es que $B_\rho = 0$

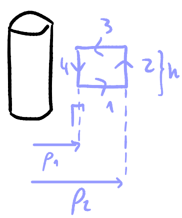
2) Si usamos Ampère para buscar la componente circunferencial



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 I_{enc} = 0 \Rightarrow B_\phi = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B} = B(\rho)\,\hat{z}$$

Ahora buscamos el campo magnético fuera:



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cancel{I_{enc}}^{\,0} \Leftrightarrow \oint_\Gamma B(\rho)\,\hat{z}\cdot d\vec{l} = 0$$

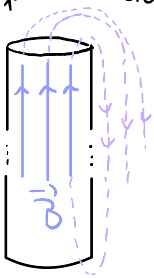
$$\Rightarrow \int_4 B(\rho_1)\,dz + \int_2 B(\rho_2)\,dz = B(\rho_1)\int_0^h dz + B(\rho_2)\int_h^0 dz$$

$$= h\,(B(\rho_1) - B(\rho_2)) \Rightarrow B(\rho_1) = B(\rho_2)$$

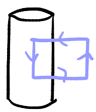
El cpo es cte para $\rho > R$. De forma análoga, el campo también es constante para $\rho < R$.

-> Podemos calcular el campo magnético en $\rho = 0$ con Biot-Savart.

-> Podemos ver que $B(\rho \to \infty) \to 0$. Quizás esto les puede hacer ruido, porque el solenoide es infinito. Pero veamos un dibujo



deberíamos ver que las líneas del campo se cierran, pero si el solenoide es infinito, no hay un lugar donde la línea pueda "salir" del solenoide

=>  $\to \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B(\rho < R)\, h$; $I_{enc} = -nhI$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I & \rho < R \\ 0 & \rho > R \end{cases}$$

b) $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \;/ \int d\vec{s} \underset{\text{Stokes}}{\Rightarrow} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \Phi$

Sabemos que $\vec{A} = A(\rho)\,\hat{\phi}$ (Para que $\vec{B} = B(\rho)\,\hat{z}$)

$$\Phi_B = \int \mu_0 n I \, \rho \, d\rho \, d\phi = \mu_0 n I \pi R^2$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int A(\rho)\, \rho \, d\phi = A(\rho)\, 2\pi\rho$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\rho > R) = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2}{\rho} \hat{\phi}$$

$$\Phi_B = \mu_0 n I \pi \rho^2 \Rightarrow \vec{A}(\rho < R) = \frac{\mu_0 n I}{2} \rho \, \hat{\phi}$$

c) $\Phi_B = \pi R^2 \mu_0 n I \overset{\text{ya lo vimos}}{=} A(\rho)\, 2\pi\rho$

d) $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi = \vec{A} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \Rightarrow \Phi'(\rho > R) = \oint \vec{A}' \cdot d\vec{l} = A(\rho > R)\, 2\pi\rho - \frac{\Phi}{2\pi} \int \frac{\hat{\phi}}{\rho} \cdot d\vec{l}$

$$\Phi'(\rho>R) = \underbrace{A(\rho>R)\, 2\pi\rho}_{\text{esto era } \Phi} - \Phi \quad = \Phi - \Phi = 0$$

El flujo magnético es algo físico, entonces ¿El Gauge es relevante físicamente?

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \left(\vec{A} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{\rho} \right) = \vec{B} - \frac{\Phi}{2\pi} \nabla \times (\hat{\phi}/\rho) = \vec{B} - \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{1}{\rho} \right) \hat{z}$$
$$= \vec{B}$$

Lo último es válido sólo para $\rho \neq 0$

Miremos $\displaystyle \int \underbrace{\nabla \times \left(\frac{\hat{\phi}}{\rho} \right)}_{\text{vimos que debería ser cero}} \cdot (\rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{z}) \overset{\text{stokes}}{=} \oint \frac{\hat{\phi}}{\rho} \cdot \rho\, d\phi\, \hat{\phi} = 2\pi$

¿$0 = 2\pi$?

Claramente no está bien, nos falta considerar $\rho = 0$. Esto se puede arreglar pero esto escapa al curso (delta de Dirac). Ocurre que al arreglar el problema con el flujo, el cambio magnético varía.

En realidad, es una mala transformación, porque $\chi \propto \phi$ y en $\rho = 0$ no está bien definido ϕ. Pasa lo mismo con $\nabla \chi \propto \hat{\phi}$.

La transformación es claramente inconsistente, ya que ϕ es una coordenada periódica y $\chi(0) \neq \chi(2\pi)$.

La lección, es que hay condiciones de regularidad que se deben satisfacer para este tipo de transformaciones

P3| a) Gracias a $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$, nos basta con encontrar el campo magnético que ejercen los dipolos en A y B sobre C.

Por ppio de superposición, calculamos el campo que genera un dipolo.

$$\vec{B}_{\vec{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left\{\frac{3[\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')](\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \vec{m}\right\}$$

Si fijamos el origen en C y $\hat{e}_1$ es la dirección que apunta desde C hasta A, tenemos

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=0\\ \vec{r}'=a\hat{e}_1\end{array}\right\} \vec{B}_{\vec{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_0}{a^3}\left\{\frac{3[\hat{z}\cdot(-a\hat{e}_1)]}{a^2}(-a\hat{e}_1) - \hat{z}\right\}$$

Como $\hat{z}\perp\hat{e}_1 \Rightarrow \vec{B}_{\vec{m}} = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi a^3}\hat{z}$

El campo total que siente el dipolo en C es:

$$\vec{B}_{2\vec{m}} = -\frac{\mu_0 m_0}{2\pi a^3}\hat{z}$$

Con esto, $\Delta U = -\vec{m}\cdot\vec{B} - (+\vec{m}\cdot\vec{B}) = -2\vec{m}\cdot\vec{B} = \frac{\mu_0 m_0^2}{\pi a^3}$

b) Con $\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$, es claro que es nulo.