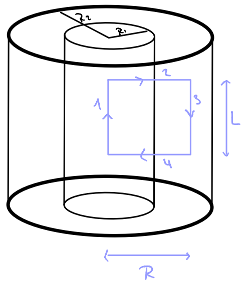
P1 a) Usaremos la ley de Ampère, con loops rectangulares:



Tenemos 4 caminos

1) $d\vec{\ell} = dz\hat{z}$; $z \in [0,L]$; $r=0$

2) $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$; $r \in [0,R]$; $z=L$

3) $d\vec{\ell} = dz\hat{z}$; $z \in [L,0]$; $r=R$

4) $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$; $r \in [R,0]$; $z=0$

El campo magnético, es de la forma

$$\vec{B} = B(r)\hat{z}$$

no va en $\hat{\theta}$, porque es la dirección de la corriente

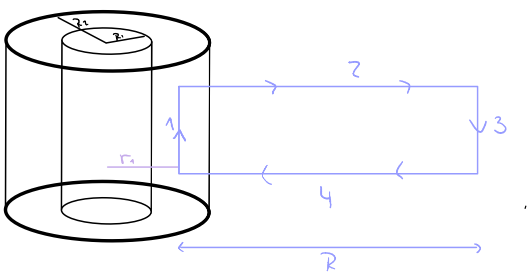
no va en $\hat{r}$, porque se cancelan

se cancelan las componentes.

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^L \underbrace{B_1(r=0)}_{\vec{B}(r<R_2)=0}\hat{z}\, dz\hat{z} + \int_0^R B_2(r)\underbrace{\hat{z}\, dr\hat{r}}_{=0} + \int_L^0 B_3(r=R)(-\hat{z})dz\hat{z} + \int_R^0 B_4(r)\underbrace{\hat{z}\, dr(-\hat{r})}_{=0} = \int_0^L B_3(R)dz = B_3(R)L$$

Por otro lado $I_{enl} = I_2 N_2 \cdot L$ $\Rightarrow$ $B_3(R)L = \mu_0 I_2 N_2 L$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = -\mu_0 I_2 N_2 \hat{z}$ $\rightarrow$ para radios entre R_1 y R_2.

Ahora tomamos otro loop, que encierre a I_1 para relacionar las corrientes.



Es el mismo proceso av r.
Podemos tomar $R \to \infty$, tal que el campo magnético muy lejos sea nulo.

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^L B_1(r_1)dr_1 = B_1(r_1)L \quad ; \quad I_{enc} = N_1 L I_1 \Rightarrow B_1(r_1) = \mu_0 N_1 L \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 N_1 I_1 \hat{z}$$

$\rightarrow$ para radios entre R_1 y R_2.

Igualando los campos que obtuvimos: $-\mu_0 I_2 N_2 \hat{z} = \mu_0 I_1 N_1 \hat{z}$ $\Rightarrow$ $I_2 = -I_1 \dfrac{N_1}{N_2}$

b) Tenemos $d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \times \vec{B}$, pero como la densidad de corriente lineal es por definición la corriente por unidad de largo $K = dI/d\ell$, pero en nuestro caso $dI = I_2$, ya que es "un trozo infinitesimal" de corriente para el solenoide $\Rightarrow K_2 = I_2/d\ell$

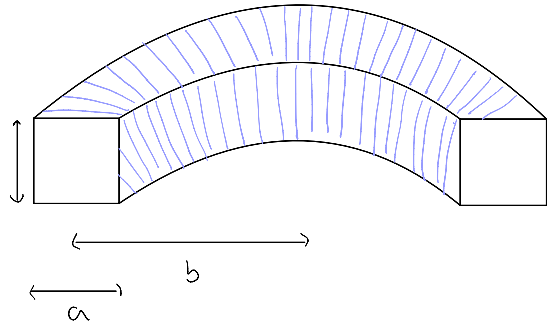
$$\Rightarrow d\vec{F} = K_2 \underbrace{d\ell\, d\vec{\ell}}_{d\vec{S}} \times \vec{B} = K_2 d\vec{S} \times \vec{B}.$$

Ahora, podemos decir que $d\vec{S} = dS\hat{\theta}$, ya que este diferencial de superficie corresponde al de la superficie por la que se mueve K_2. Por otro lado, $K_2 = I_2 N_2$ $\rightarrow$ esto es directamente, la densidad lineal de corriente (intenten pensar esto de la forma que se les haga más natural y recuerden que N_2 tiene unidades de Longitud^{-1}, o si les acomoda penar en Número/Longitud recordando qué número no es una dimensión real).

$$\Rightarrow d\vec{F} = I_2 N_2\, dS\left[\hat{\theta} \times (\mu_0 N_1 I_1 \hat{z})\right] \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dS} = \mu_0 I_1 N_1 I_2 N_2\, \hat{r} = -\mu_0 (I_2 N_2)^2\, \hat{r}$$

Nota: En la clase lo hicimos de una forma distinta. Esto es para ilustrar otra forma de usar Ampère. Otra cosa que cambió son signos, ya que aquí los loops los usé al revés. No se asusten.

P2 El toroide es algo de esta forma:



a) Para obtener el campo magnético, usaremos ley de Ampère. Nos damos un loop circular con radio entre $b-a/2$ y $b+a/2$, tal que su centro coincide con el centro del toroide. Por la simetría del problema $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$ y usaremos cilíndricas.

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r)\, r\, d\theta = B(r) 2\pi r \quad ; \quad I_{enc} = NI$$

→ en realidad, debemos ver el signo de la corriente, pero asumimos que irá en $+\hat{k}$ en la cara interna y en $-\hat{k}$ en la cara externa.

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\theta} \quad \rightarrow \text{para } r \in [b-a/2,\, b+a/2]$$

Podemos ver que si $r > b + a/2$, encerraríamos N vueltas de corriente viajando hacia arriba, y N vueltas de corriente hacia abajo. De esta forma, si estamos por fuera obtenemos que no hay corriente encerrada. Como tampoco hay corriente encerrada para $r < b - a/2$

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\theta} & b-\dfrac{a}{2} < r < b+\dfrac{a}{2} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

b) Lo único que podría llegar a cambiar, son los límites que nos dan la región donde el campo es no nulo.

c) A partir de la condición de borde $B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 K$

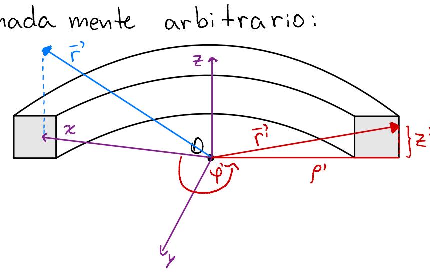
$$B_0 - \frac{\mu_0 N I}{2\pi(a+b/2)} = \mu_0 K \Rightarrow K = \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{NI}{\pi(2a+b)}$$

¿Qué ocurre si $B_0 = 0$? ¿Es una contradicción?

¿Por qué $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$? Esto no es algo tan directo. Se puede explicar como lo hicimos en aux, pero aquí dejo una respuesta más robusta.

Según Biot-Savart: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{I\, d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$ → Recuerdo $\vec{r}$: Vector que nos indica el pto en el que evaluamos $\vec{B}$
$\vec{r}\,'$: Vector que nos indica dónde está la corriente

Tomemos un $\vec{r}$ extremadamente arbitrario:



$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ → en cartesianas
$\vec{r}\,' = \rho'\cos\varphi'\hat{\imath} + \rho'\sin\varphi'\hat{\jmath} + z'\hat{k}$ → en "cilíndricas"

Como tomamos el plano xz tq $\vec{r}$ no tenga comp. en $\hat{\jmath}$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = (x - \rho'\cos\varphi')\hat{\imath} + (-\rho'\sin\varphi')\hat{\jmath} + (z - z')\hat{k}$$

$$\Rightarrow I\,d\vec{l}' = I_\rho \cos\varphi' \hat{\imath} + I_\rho \sin\varphi' \hat{\jmath} + I_z \hat{k}$$

$$\Rightarrow I\,d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ I_\rho \cos\varphi' & I_\rho \sin\varphi' & I_z \\ x-\rho'\cos\varphi' & -\rho'\sin\varphi' & z-z' \end{vmatrix} = \left[\sin\varphi'\left(I_\rho(z-z') + I_z\rho'\right)\right]\hat{\imath} + \left[I_z(x-\rho'\cos\varphi') - I_\rho\cos\varphi'(z-z')\right]\hat{\jmath} + \left[-I_\rho x \sin\varphi'\right]\hat{k}$$

Ahora, por la simetría del toroide, podemos ver un $\vec{r}''$, con igual radio ρ', igual intensidad de corriente I (por ello, igual I_ρ y I_z), igual z', pero con $\phi'' = \pi + \phi'$, de forma que: $\cos\varphi'' = \cos\varphi'$ $\wedge$ $\sin\varphi'' = -\sin\varphi'$.

Con ello, y superposición, tenemos que al sumar las dos contribuciones al campo magnético en $\vec{r}$, tenemos que las componentes $\hat{\imath}$ y $\hat{k}$ se cancelarán por el cambio de signo del seno.

En conclusión, sólo habrá componente en $\hat{\jmath}$, y si queremos generalizar esto, llegamos a que el campo apuntará en $\hat{\varphi}$.

Si esto sólo les enreda y ya comprenden por qué el campo magnético sólo apunta en $\hat{\varphi}$, está bien que lo sigan justificando como antes. Esto es sólo algo que quizás le ayuda a alguien, ya que es más formal.