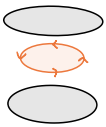
P1 a) Bajo un régimen cuasiestático, las derivadas temporales son nulas. Así que este campo es idéntico al caso electrostático.

$$\vec{E}_0 = \frac{V_0}{d}\cos(\omega t)\,\hat{z}$$

b) Para el campo magnético, usamos la ley de Ampère:

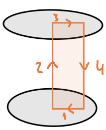


$$\nabla\times\vec{B}_1 = \mu_0\varepsilon_0\,\partial_t\vec{E}_0 \quad \Big/ \iint \cdot\, d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B}_1\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0}{d}\left(-\omega\sin(\omega t)\right)\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{r} r'\,dr'\,d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} B_1(r,t)\,r\,d\varphi = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0}{d}\left(-\omega\sin(\omega t)\right)\pi r^2$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0}{2d}\left(-\omega\sin(\omega t)\right) r\,\hat{\varphi}$$

c) Ahora, podemos ver que se va a inducir un campo eléctrico:

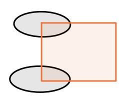


$$\nabla\times\vec{E}_1 = -\partial_t\vec{B} \quad \Big/ \iint \cdot\, d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = \partial_t\int_0^{d}\!\!\int_0^{r}\frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0}{2d}\,\omega\sin(\omega t)\,r'\,(dr'\,dz)$$

$$\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = \int_0^{d} E_1(0,t)\,dz + \int_d^{0} E_1(r,t)\,dz \quad \Bigg\| \quad = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0}{2d}\,\omega^2\cos(\omega t)\,\frac{r^2}{2}\,d = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0}{4}\,\omega^2\cos(\omega t)\,r^2$$

$$= d\left[E_1(0,t) - E_1(r,t)\right]$$

0, se puede ver con



y asumiendo que los campos son nulos fuera del condensador

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = -\frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0\omega^2}{4d}\cos(\omega t)\,r^2\,\hat{z} + \cancel{E_1(0,t)}\,\hat{z}$$

d) $$\vec{E}_{tot} = \frac{V_0}{d}\cos(\omega t)\left[1 - \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 r^2}{4}\right]\hat{z}$$

P2 Vale la pena destacar que estamos trabajando con campos complejos, por lo que tomaremos la parte real cuando trabajemos con cantidades físicas (observables, como una energía).

Para encontrar el campo magnético usamos $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{K} \times \vec{E}$ $(\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B})$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (K\hat{z}) \times (E_x \hat{x} e^{i(Kz-\omega t)} + E_y \hat{y} e^{i(Kz-\omega t-\phi)})$$

$$= \frac{K}{\omega}\left[E_x \hat{y} \; e^{i(Kz-\omega t)} - E_y \hat{x} e^{i(Kz-\omega t-\phi)}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{S} = Re\left\{\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}\right\} = \frac{1}{\mu_0} Re\{\vec{E} \times \vec{B}\}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{K}{\omega}\left\{E_x^2 \hat{z} e^{2i(Kz-\omega t)} + E_y^2 \hat{z} e^{2i(Kz-\omega t-\phi)}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{K}{\omega} \frac{1}{\mu_0} \hat{z} \left\{|E_x|^2 \cos^2(Kz-\omega t) + |E_y|^2 \cos^2(Kz-\omega t-\phi)\right\}$$

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}\, dt$, sólo nos importa $\int_0^T \cos^2[\Psi(t)]dt$, con $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\int_0^T \cos^2\Psi \, d\Psi = \frac{1}{2}\Big[\Psi + \sin\Psi\cos\Psi\Big]_0^T = \frac{1}{2}\Big[\Psi(T) - \Psi(0) + \sin(\Psi(T))\cos(\Psi(T)) - \sin(\Psi(0))\cos(\Psi(0))\Big]$$

en nuestro caso $\Psi(t) = Kz - \omega t - \phi$ $\qquad \Psi(T) = Kz - 2\pi - \phi$

$d\Psi = -\omega dt$ $\qquad \Psi(T) = Kz - \phi$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\Psi)dt = \frac{-1}{T\omega}\int_0^T \cos^2(\Psi)d\Psi = \frac{-1}{2\omega T}\Big\{Kz - 2\pi - \phi - Kz + \phi + \cancel{\sin(Kz-2\pi-\phi)\cos(Kz-2\pi-\phi)} - \cancel{\sin(Kz-\phi)\cos(Kz-\phi)}\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{K}{2\mu_0\omega}\hat{z}\left[|E_x|^2 + |E_y|^2\right]$$

P3 Tenemos dos ondas electromagnéticas:

$$\vec{E}_1(x,t) = E_1\hat{y}\cos(Kx-\omega t) \qquad \vec{E}_2(x,t) = E_2\hat{y}\cos(Kx-\omega t+\phi)$$

a) Para encontrar el vector de Poynting, necesitamos $\vec{B}$.

$$\vec{B} = \frac{\vec{K}\times\vec{E}}{\omega} \Rightarrow \vec{B}_i = \frac{\vec{K}\times\vec{E}_i}{\omega} \quad (i=1,2) \qquad \vec{B} = \vec{B}_1+\vec{B}_2$$

$\phi_1 = 0,\ \phi_2 = \phi$

$$\vec{B}_i = \frac{(K\hat{x})\times(\vec{E}_i)}{\omega} = \frac{K}{\omega}E_i\cos(Kx-\omega t+\phi_i)(\hat{x}\times\hat{y}) = \frac{KE_i}{\omega}\hat{z}\cos(Kx-\omega t+\phi_i)$$

Para ahorrar notación $\psi \equiv Kx-\omega t$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}\left[(E_1\hat{y}\cos\psi + E_2\hat{y}\cos(\psi+\phi))\times\frac{K}{\omega}(E_1\hat{z}\cos\psi + E_2\cos(\psi+\phi))\right]$$

$$= \frac{K\hat{x}}{\mu_0\omega}\left[E_1^2\cos^2\psi + E_2^2\cos^2(\psi+\phi) + 2E_1E_2\cos\psi\cos(\psi+\phi)\right]$$

b) $$I = \langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}\,dt$$

$$= \frac{K}{\mu_0\omega}\hat{x}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T E_1^2\cos^2\psi\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T E_2^2\cos^2(\psi+\phi)\,dt + \frac{2}{T}\int_0^T E_1E_2\cos\psi\cos(\psi+\phi)\,dt\right\}$$

$$= \frac{K}{\mu_0\omega}\hat{x}\left\{\frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 + 2E_1E_2\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T\cos\psi\cos(\psi+\phi)\,dt}_{I_0}\right.$$

$$I_0 = \frac{1}{T}\int_0^T(\cos\psi\cos\psi\underbrace{\cos\phi}_{cte} - \cos\psi\sin\psi\underbrace{\sin\phi}_{cte})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cos\phi - \sin\phi\,\frac{1}{T}\int_0^T\cos\psi\sin\psi\,dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos\Psi \sin\Psi \, dt \underset{\substack{\mu=\cos\Psi \\ d\mu=-\sin\Psi d\Psi \\ =\frac{1}{\omega}\sin\Psi dt}}{=} \frac{1}{T}\int_{\cos(kx)}^{\cos(kx-2\pi)} \mu \, d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{k}{2\mu_0\omega}\hat{x}\left(E_1^2+E_2^2+2E_1E_2\cos\phi\right)$$

c) Podemos pensar que $\vec{E}_i = E_i\,\hat{y}\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_i t+\phi_i)$, con $\omega_1=\omega \quad \phi_1=0$
$\omega_2=-\omega \quad \phi_2=\phi$

Nos cambia el signo de B_2

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[\left(E_1\hat{y}\cos\Psi_1+E_2\hat{y}\cos(\Psi_2+\phi)\right)\times\frac{k}{\omega}\left(E_1\hat{z}\cos\Psi_1-E_2\cos(\Psi_2+\phi)\right)\right]$$

$$\Psi_1\equiv\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t \quad , \quad \Psi_2\equiv\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t$$

$$\vec{S} = \frac{k}{\mu_0\omega}\hat{x}\left\{E_1^2\cos^2\Psi_1 - E_2^2\cos^2(\Psi_2+\phi)\right\}$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{k}{2\mu_0\omega}\hat{x}\left\{E_1^2-E_2^2\right\}$$