P1. .

Considere un cilindro cargado de altura h y radio R. Su densidad de carga volumetrica esta dada por la expresion:

$$\rho(r, z) = 3q_0 r^3 \sqrt{z}$$

Considere z=0 la base del cilindro y r la distancia a su eje de simetria:
Calcule la carga total del cuerpo.

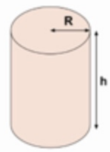


Figura 1

P2.

Considere dos placas infinitas y paralelas a una distancia d. La placa inferior tiene densidad de carga superficial σ, mientras que la superior tiene densidad $-\sigma$. Ademas la placa superior contiene un agujero de radio R.
Encuentre los puntos donde el campo electrico se anula.

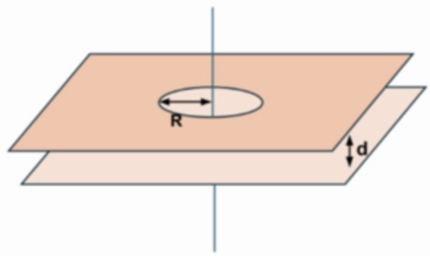


Figura 2

P3.

Considere un anillo de radio R con una densidad de carga lineal dada por:

$$\lambda(\theta) = q_0 \frac{|\theta|}{\pi}$$

Donde $\theta \in$ [-π , π]
Encuentre el campo electrico en el centro del anillo.

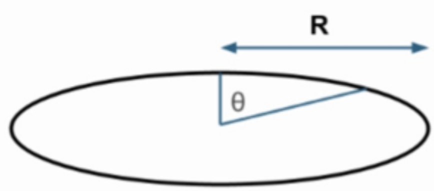
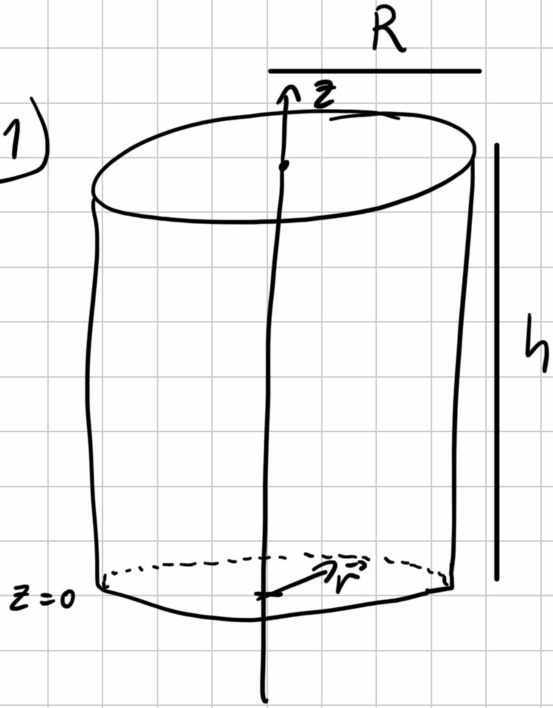


Figura 3

P1)



$\rho = Q/\text{Volumen}$ → caso uniforme

$\rho_{(\vec{r})} = \frac{dq}{dV}$ → Nos dice la relación entre la carga de un espacio infitesimal y su volumen. Entendemos un espacio infitesimal como un punto.

$\rho(\vec{r})$: nos da la relacion $q/_{Vol}$ de cada punto del espacio

$\rho_{(\vec{r})} = 3q_0 r^2 \sqrt{z}$ la densidad de carga no es uniforme, depende de la altura (z) y distancia del eje (r) de donde la "midamos".

Ej: · En la base ⇒ $z=0 \Rightarrow \rho = 0$

· En el eje ⇒ $r = 0 \Rightarrow \rho = 0$

$\boxed{dV = r\,d\theta\,dr\,dz}$

$$Q = \int dq = \int \rho_{(\vec{r})}\,dV = q\iiint 3r^2\sqrt{z}\,(r\,d\theta\,dr\,dz)$$

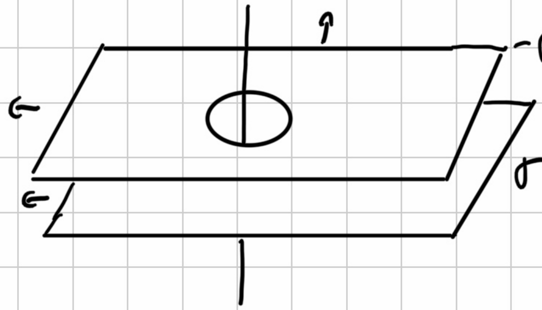
$$= 3q_0 \int_0^h \int_0^R \underbrace{\int_0^{2\pi} r^3 \sqrt{z}\,d\theta}_{\text{cte en } \theta \Rightarrow 2\pi}\,dr\,dz$$

$$= q_0 3\cdot 2\pi \int_0^h \underbrace{\int_0^R r^3 \sqrt{z}\, dr}_{1/4\,(r^4)_0^R \sqrt{z}}\, dz$$

$$= \frac{q\,6\pi}{4}(R^4 - 0^4)\int_0^h \sqrt{z}\, dz$$

$$= q\,\tfrac{3}{2}\pi R^4\ \tfrac{2}{3}\left(z^{3/2}\right)_0^h = q_0 \pi R^4 h^{3/2} = Q \ \blacksquare$$

P2)



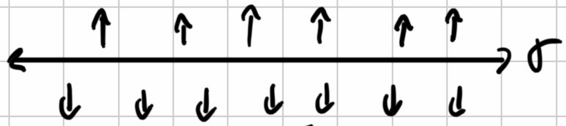
$-\sigma = \frac{dq}{dA}$

$\sigma = \frac{dq}{dA}$

} uniforme opuestas entre placas

Como vimos en clase $\vec{E}(\vec{z})$ generado por una placa infinita es $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$: cte independiente de que tan lejos me encuentre de la placa.

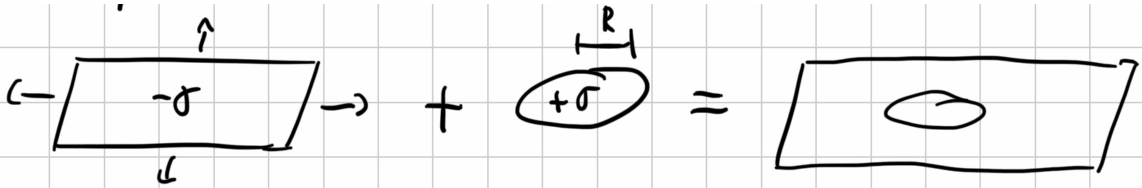
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,-\hat{z}$$

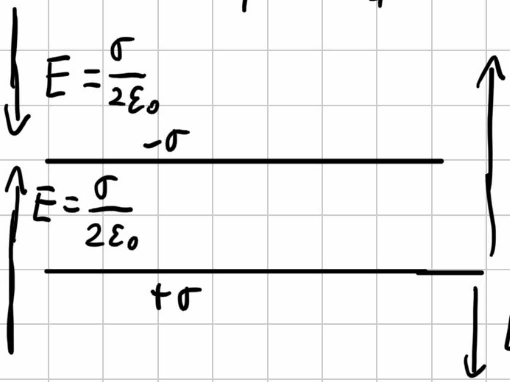
Usaremos el principio de superposición para calcula el campo electrico en todo el espacio

Consideraremos la placa agujereada como la superposicion de una placa con densidad $-\sigma$ y un disco de radio R con densidad $+\sigma$.



Sabemos el campo que producen ambas placas.

El sigmo (−) cambia el sentido del campo pues las cargas pasan de repelerse a atraerse a la placa

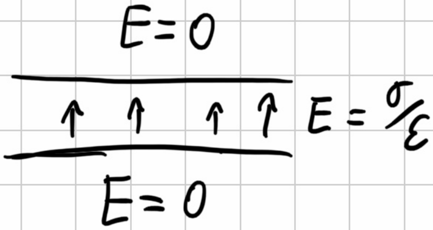


$$\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z}=0$$

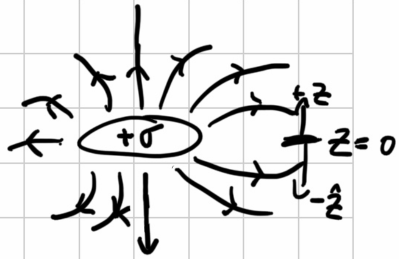
$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z}=0$$

$\therefore$ $z=0$



$+$

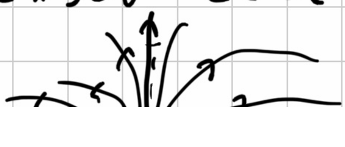


En el enunciado se nos pide encontrar el punto en donde se anule el campo

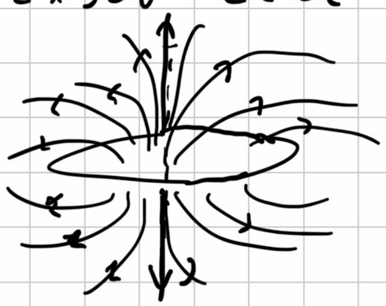
es decir donde la suma de los campos de las placas y del disco sumen $\vec{0}$.

Como el campo del disco nunca es nulo en espacio exterior de las placas el campo total tampoco lo será.

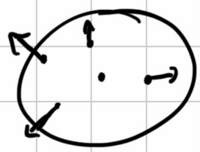
Solo nos queda buscar un punto entre las placas en dond se cancelen los campos. Para esto el campo del disco debe ser $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}-\hat{z}$ sin componente horizontal,



disco debe ser $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} -\hat{z}$ sin componente horizontal,



El eje de simetría son los unicos puntos donde el campo $\vec{E}$ no tiene compomente $\hat{r}$. Por lo que calcularemos el campo $\vec{E}$ en el eje.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dq \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} =$$

$dq = \sigma\, r\, d\theta\, dr$

$\vec{r} = -z\,\hat{z}$ usaremos $-z$ para abajo

$\vec{r}' = r\,\hat{r} = r\underbrace{(\cos(\theta)\hat{x} + \operatorname{sen}(\theta)\hat{y})}_{\int_0^{2\pi}\hat{r}\,d\theta = 0}$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r\,(-z\,\hat{z} - \cancel{r\,\hat{r}})}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,d\theta\,dr \qquad \int d\theta = 0$$

$$= \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{zr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,dr\;\hat{z}$$

Cambio de variable: $u = (z^2+r^2)$

$\frac{du}{dr} = 2r \Rightarrow r\,dr = \frac{1}{2}du$

$\left.\begin{array}{l} r=0 \Rightarrow u = z^2 \\ r = R \Rightarrow u = z^2+R^2 \end{array}\right\}$ limites de integracion

$$\vec{E}(\vec{z}) = \frac{-\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{du}{u^{3/2}} = \frac{-\sigma}{4\varepsilon_0}(-2)\,u^{-1/2}\Big|_{z^2}^{z^2+R^2}$$

$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1/z}{1/z}$$

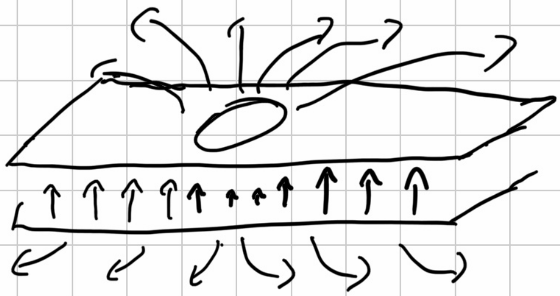
$$= \frac{\sigma \cancel{z}}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{z}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}-1\right)$$

Imponemos que este campo es igual a $\frac{-\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$ para que se cancele con el de las placas.

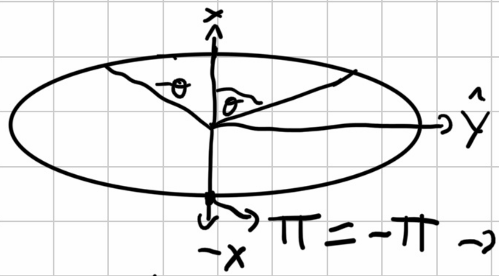
$$\frac{\cancel{\sigma}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}-1\right)\cancel{\hat{z}} = \frac{-\cancel{\sigma}}{\cancel{\varepsilon_0}}\cancel{\hat{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}-1=-2 \Rightarrow \sqrt{1+R^2/z^2}=-1 \quad \times$$

No existe z tq $\vec{E}(\vec{z}) = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}$ Por lo que no existe punto donde $\vec{E}=0$.



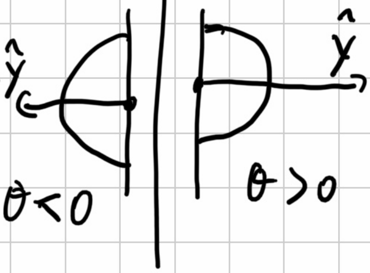
P3



$\lambda(\theta) = \frac{q|\theta|}{\pi}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$

$\pi = -\pi \rightarrow$ MAX de densidad

La



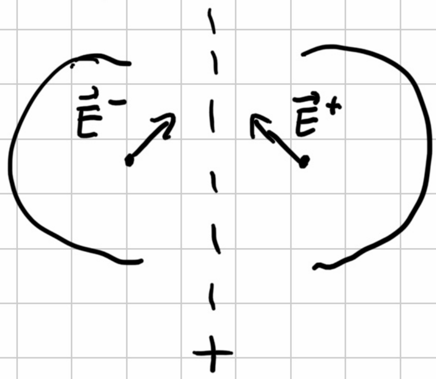
Simetria axial

S

Sea $\vec{O}$ el centro do anillo. desde ese punto la region $\theta<0$ del anillo es una reflexion de $\theta>0$

Si consideramos $\vec{E}^{+}(\vec{0})$ el campo producido por la region $\theta>0$ y $\vec{E}^{-}(\vec{0})$ el producido por $\theta<0$.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \vec{E}^{-}(\vec{0})_x &= \vec{E}^{+}(\vec{0})_x \\ \vec{E}^{+}(\vec{0})_y &= -\vec{E}^{-}(\vec{0})_y \end{aligned}\right\} \bigstar$$



Calcularemos $E^{+}(\vec{0})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$dq = \lambda(\theta)\,dl = \lambda r\,d\theta = \frac{q\theta}{\pi} r\,d\theta$$

$\vec{r} = 0$

$\vec{r}' = R\hat{r} = R(\cos(\theta)\hat{x} + \operatorname{sen}(\theta)\hat{y})$

$|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = R^3$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q\theta R}{\pi}\,\frac{(-)R\,\hat{r}}{R^3}\,d\theta$$

$$= \frac{-q}{4\pi^2 R\varepsilon_0}\int^{\pi} \theta\,(\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{y} + \cos(\theta)\,\hat{x})\,d\theta$$

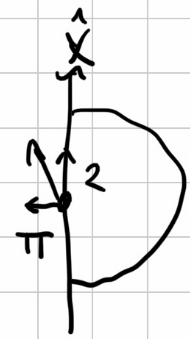
$\hat{y}$: $\int \theta \,\text{sen}(\theta)\, d\theta = IPP = \theta(-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi} + \cancel{\int_0^{\pi} \cos(\theta)\, d\theta} \to 0$

$$= \pi(1) - 0 = \pi$$

$\hat{x}$: $\int \theta \cos(\theta)\, d\theta = IPP = \theta\, \cancel{\text{sen}(\theta)}^{\,0}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \text{sen}(\theta)$

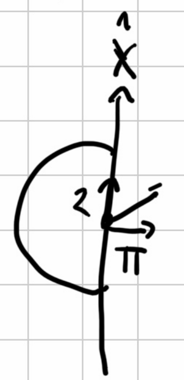
$$= \cos(\theta)\Big|_0^{\pi} = -2$$

$$\Rightarrow \vec{E}^{+}(\vec{0}) = \frac{-q}{4\pi^2 R\varepsilon_0}\left(-2\hat{x} + \pi\hat{y}\right)$$



$\Rightarrow$ Por Simetria ☆

$$\vec{E}^{-}(\vec{0}) = \frac{-q}{4\pi^2 R\varepsilon_0}\left(-2\hat{x} - \pi\hat{y}\right)$$



$$\vec{E}(\vec{0}) = \vec{E}^{+}(0) + \vec{E}^{-}(0) = \frac{2q}{4\pi^2 r \varepsilon_0}\hat{x}$$