Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Clase Auxiliar

Modelamiento de Problemas de Programación Lineal con Variables Binarias.

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@cec.uchile.cl

1. Introducción

En optimización, frecuentemente aspiraremos a modelar problemas de modo lineal ya que son empíricamente mas fáciles de resolver. Sin embargo, muchos problemas presentan situaciones en que la linealidad del modelo se hace muy difícil de sostener con un conjunto de variables continuas como única herramienta de modelación. Es así como surgen las variables binarias (aquellas que solo pueden tomar los valores 0 y 1) como un artificio que nos permite expresar situaciones no lineales como lineales. A primera vista puede pensarse que el artificio no sirve de nada porque el definir una variable como binaria ya hace que el modelo se deslinealice y en efecto tienen razón. Sin embargo, mas adelante se verá que esta definición de variables es bastante conveniente pues existen algoritmos para resolver este tipo de problemas basandose en las técnicas de programación lineal [2].

De este modo queda claro que es necesario tener un buen manejo de las variables binarias como una potente herramienta de modelación matemática. Si bien es cierto que no se puede dar un algoritmo de modelación, al menos podemos exhibir una serie de situaciones frecuentes en que se ejemplifica su uso. Ese es el objetivo de esta clase.

2. Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias

2.1. Producción acotada

Consideremos la producción de un producto j (x_j), el cual puede producirse o no, pero que en caso de producirse solo puede hacerse en un nivel comprendido entre L_j y U_j. Para modelar esta restricción, aparte del nivel de producción x_j, definimos la siguiente variable binaria:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se produce el producto j.} \\ 0 & \text{Si no se produce el producto j.} \end{cases}$$

Asi, la restricción vendría dada por

$$L_j \cdot y_j \leq x_j \leq U_j \cdot y_j$$

[2] Si hay alguien muy inquieto puede comenzar a investigar acerca del algoritmo de ramificación y acotamiento que se verá mas adelante en el curso.

2.2. Producción acotada inferiormente

Consideremos la producción de un producto j (x_j), el cual puede producirse o no, pero que en caso de producirse solo puede hacerse en un nivel de al menos Lj sin que exista una cota superior explicita. La táctica anterior no sirve por lo que aparte de la variable y_j, inventamos un nuevo parametro M_j que sirva como una cota superior:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se produce el producto j.} \\ 0 & \text{Si no se produce el producto j.} \end{cases}$$

$$M_j = \text{Un número muy grande.}^3$$

Asi, la restriccion vendría dada por

$$L_j \cdot y_j \leq x_j \leq M_j \cdot y_j$$

2.3. Costo Fijo

Consideremos el caso en que debemos decidir si realizar o no una actividad cuyo costo tiene tanto una componente fija como una variable, es decir el costo de realizar la actividad al nivel x_j viene dado por:

$$C(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x_j = 0. \\ f_j + v_j x_j & \text{Si } x_j > 0. \end{cases}$$

En este caso, nuevamente nos es de gran utilidad definir una variable binaria:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se realiza la actividad j.} \\ 0 & \text{Si no se realiza la actividad j.} \end{cases}$$

Así, la función de costo queda como:

$$C(x_j) = f_j \cdot y_j + v_j \cdot x_j$$

Notar sin embargo que hasta ahora nada impide al modelo adoptar soluciones del tipo $y_j = 0$ y $x_j = k \neq 0$, situación que evitamos imponiendo la siguiente restricción:

[3] Que sea una cota empírica para x_j. En la práctica siempre podremos encontrar un número que sea razonable pensar que no se sobrepasará esa cota.

$$x_j \leq M_j \cdot y_j \qquad \text{con } M_j \text{ muy grande}$$

Observación: Existen otras formulaciones alternativas como por ejemplo $C(x_j) = f_j \cdot y_j + v_j \cdot x_j \cdot y_j$, pero no son lineales.

2.4. Variables que toman un conjunto de valores

Consideremos ahora la situación en que una variable x_j solo puede tomar ciertos valores bien definidos: $x_j \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. En este caso, debemos definir:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } x_j = a_i \\ 0 & \text{Si } x_j \neq a_i \end{cases}$$

x_j solo puede tomar un valor en el conjunto, entonces tenemos la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1 \quad \forall j$$

Además, x_j vendrá dado por:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot y_{ij}$$

2.5. Restricciones excluyentes (una u otra)

Examinaremos esta situación a través de un ejemplo: Consideremos que existen 2 restricciones de las cuales se requiere que solo una de ellas sea satisfecha:

$$(1) \qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

ó

$$(2) \qquad 5x_1 + 4x_2 \leq 16$$

Esta restricción no esta en formato de programación matemática pues en él se asume que deben cumplirse TODAS las restricciones. Sean:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{Si la restricción (1) es la que se cumple} \\ 0 & \text{Si la restricción (2) es la que se cumple} \end{cases}$$

$$\text{M muy grande } (M \gg 1)$$

Entonces:

$$(\bar{1}) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M \cdot (1 - y)$$
$$(\bar{2}) \quad 5x_1 + 4x_2 \leq 16 + M \cdot y$$

2.6. Max-Max

Se desea plantear algo del tipo

$$\text{máx } t = \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$s.a \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$$

La función objetivo anterior es intrínsicamente no lineal. Queremos plantear un modelo lineal:

$$\begin{array}{rrcl} & \text{máx } t & & \\ s.a & t & \geq & x_i \quad \forall i. \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \in & S \end{array}$$

Sin embargo, esto no impide que t crezca indefinidamente. Queremos que $t = x_1$ ó $t = x_2$ ó ... ó $t = x_n$. Esto se implementa con variables binarias:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si } t \leq x_i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego, considerando $M \gg 1$ el modelo queda:

$$\begin{array}{rrcll} & \text{máx } t & & & \\ s.a & t & \geq & x_i & \forall i. \\ & t & \leq & x_i + M(1 - y_i) & \forall i. \\ & \sum_{i=1}^{n} y_1 & = & 1 & \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \in & S & \end{array}$$

Quedan propuestos los casos de varias situaciones excluyentes, criterio de min-max y min $|x_1 - x_2|$.

Observación: Las variables binarias son muy poderosas para modelar, pero no es fácil resolver problemas en los que estan ivolucrados. Es por esto que se deben usar con precaución y discreción.

$\odot$

3. Problemas

3.1. Problema 1

Una empresa europea piensa instalar plantas de producción en Chile para lanzar sus productos al mercado chileno por lo que necesita decidir su plan de producción para el próximo año. La empresa puede fabricar N productos distintos y la elaboración de cada uno de ellos implica la compra de una máquina especializada para su elaboración a un costo de $\$f_n$. Además, el costo variable de producir una unidad del producto n es de $\$c_n$. Así, si se decide elaborar el producto n se deberá necesariamente incurrir en un costo de $\$f_n$ mas los costos variables por elaboración del producto y si se decide no fabricarlo no se incurrirá en ningún tipo de gasto.

Si la demanda pronosticada para el producto n es de D_n unidades (n=1...N) pudiendo venderse dicho producto a un precio de $\$p_n$, formule un PPL mixto que resuelva el problema de encontrar el conjunto de productos que la empresa debe fabricar.

Solución

1. Variables de Decisión.

$$x_n = \text{Unidades de producto n a producir.}$$

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{Si se decide producir el producto n.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Restricciones

   a) Demanda acotada

   $$x_n \leq D_n$$

   b) Producir solo si se compra la máquina

   $$x_n \leq y_n \cdot M \quad M \gg 1$$

3. Función Objetivo

$$\text{máx } z = \sum_{n=1}^{N} (p_n \cdot x_n - f_n \cdot y_n - c_n \cdot x_n)$$

Observación: Las 2 restricciones escritas pueden resumirse en una sola notando que no necesitamos un M tan grande y basta con poner $M = D_n$. Así la restricción puede escribirse como:

$$x_n \leq y_n \cdot D_n$$

3.2. Problema 2

Un estudiante debe rendir exámenes en los cursos de Economía, Estadistica, Electromagnetismo y Optimización. Para estudiar estos 4 exámenes dispone solamente de 20 horas.

Con el proposito de asignar el tiempo de estudio, a cada curso el estudiante ha fraccionado su tiempo disponible en bloques de 4 horas cada uno.

La nota que obtendrá en un examen determinado dependerá de los bloques de tiempo que asigne al estudio de ese curso. Sea C_{ij} la nota que obtendrá en el curso i al asignarle j bloques de tiempo (i=1,2,3,4; j=0,1,2,3,4,5).

Para aprobar Electromagnetismo debe obtener al menos un 4 en el examen y para aprobar optimización debe obtener al menos un 3. Los 2 cursos restantes los aprueba con cualquier nota en el examen.

El problema consiste en encontrar una asignación de tiempo tal que respetando su disponibilidad horaria permita aprobar los 4 cursos obteniendo la máxima suma de nota en los exámenes. Plantee un modelo lineal que represente el problema.

Solución

1. Variables de Decisión.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si dedico j bloques a estudiar el ramo i} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, ..., 4 \\ j = 0, ..., 5 \end{array}$$

2. Restricciones

   a) Obtener al menos un 4 en electromagnetismo.

$$\sum_{j=0}^{5} x_{ij} \cdot C_{ij} \geq 4 \qquad \text{i=Electromagnetismo}$$

   b) Obtener al menos un 3 en optimización.

$$\sum_{j=0}^{5} x_{ij} \cdot C_{ij} \geq 3 \qquad \text{i=Optimización}$$

   c) Para cada ramo solo decidir 1 vez cuantos bloques dedicar

$$\sum_{j=0}^{5} x_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

d) No ocupar mas de 5 bloques en total

$$\sum_{j=0}^{5}\sum_{i=1}^{4} j \cdot x_{ij} \leq 5$$

3. Función Objetivo

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{5} x_{ij} \cdot C_{ij}$$

3.3. Problema 3

Un artista tiene 7 días para completar 4 obras de arte. Quiere asignar el tiempo disponible de la forma mas eficiente posible. Necesita por lo menos un día para cada obra y quiere dedicar a una sola obra cada día, puediendo asignar 1, 2, 3 o 4 días a cada una de ellas. Como sabe de optimización, ha decidido realizar estas asignaciones maximizando el total de sus ingresos. El artista estima que las distintas alternativas en día de trabajo asignado le reportarán ingresos de acuerdo al tiempo dedicado a cada obra. Sea C_{ij} el ingreso de la obra i si trabaja en ella j días. Formule un modelo lineal que permita al artista asignar su tiempo.

Solución

1. Variables de decisión.

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{Si el artista trabaja en la obra i en el dia k} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, ..., 4 \\ k = 1, ..., 7 \end{array}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el artista dedica j dias en la obra i} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, ..., 4 \\ j = 1, ..., 4 \end{array}$$

2. Restricciones.

a) Cada obra necesita de al menos 1 día de trabajo

$$\sum_{k=1}^{7} x_{ik} \geq 1 \qquad i = 1, ..., 4$$

Ó alternativamente

$$\sum_{j=1}^{4} y_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., 4$$

b) Cada día debe pintarse a lo mas 1 obra

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ik} \leq 1 \qquad k = 1, ..., 7$$

c) Agregamos una restricción que una logicamente x_{ik} con $y_i j$

$$\sum_{k=1}^{7} x_{ik} = \sum_{j=1}^{4} j \cdot y_{ij} \qquad i = 1, ..., 4$$

3. Función Objetivo.

$$\text{máx } F = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} C_{ij} \cdot y_{ij}$$

3.4. Problema 4

Una determinada empresa forestal puede produce L productos distintos y tiene I plantas productoras ubicadas en diferentes zonas, siendo S_{it} la capacidad de total de producción de la planta i (i=1,...,I) en el periodo t (t=1,...,5) sin importar de que tipo de producto se trate. El tipo de producto l tiene un costo de producción de P_l sin importar la planta en que se fabrique ni el periodo en cuestión. Los productos son demandados por J ciudades diferentes, siendo D_{ljt} la demanda de la ciudad j (j=1,...,n), por el producto l (l=1,..., L), en el periodo t. Las demandas deben ser satisfechas período a período.

Como no existe la posibilidad de almacenar producto en las plantas, la empresa esta estudiando la posibilidad de arrendar bodegas ubicadas en diferentes puntos geográficos. El arriendo de las bodegas se hace período a período, esto quiere decir que si se arrienda la bodega k en el período t, no necesariamente la bodega k debe haber estado arrendada en el período t-1 o seguir arrendada para el período t+1. Hay K posibles bodegas para arrendar. De esta manera, la producción de las plantas se llevará a las bodegas y desde allí se abastecerá a las ciudades. No existe inventario de productos, las bodegas solo se utilizan para etiquetar los distintos artículos. Si se arrienda la bodega k (k=1,...,K) se incurre en un gasto fijo de F_{kt} pesos por el pago de arriendo en el periodo t. Ahora bien, si se arrienda una bodega por 3 períodos consecutivos se recibirá un reembolso de W pesos por cada secuencia de 3 periodos consecutivos. Por cada unidad del artículo l que ingrese a la bodega k se gasta E_{lk} pesos por concepto de etiquetación. La capacidad de la bodega k es de Q_k unidades de producto sin importar su tipo.

Además se sabe que cada ciudad debe ser abastecida desde una única bodega en cada período y tambien se sabe que la bodega k puede despachar como mínimo al total de ciudades que abastezca la cantidad de L_k y como máximo la cantidad de U_k unidades de artículos (del total de artículos que despacha). Si la bodega despacha mas de U_k unidades de producto, se le debe pagar un bono extra a los empleados de esa bodega igual a B_k pesos, fijo independiente de la magnitud del exceso.

El costo de transporte del producto l desde la planta i a la bodega k en el periodo t es de M_{likt} pesos y el costo de transporte desde la bodega k a la ciudad j del producto l en el período t es de N_{lkjt} pesos.

Plantee un modelo de programación lineal mixto que permita determinar que bodegas deben arrendarse para que el costo de producción, transporte, arriendo y almacenamiento sea mínimo.

Solución

1. Variables de decisión.

$$x_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{Si se arrienda la bodega k en el periodo t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\alpha_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{Si arrienda bodega k en periodos t, t+1 y t+2} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\beta_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{Si se excede el máximo } U_k \text{ en el período t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\gamma_{kjt} = \begin{cases} 1 & \text{Si bodega k abastece a ciudad j en periodo t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$w_{lit} = \text{Unidades de producto del tipo l producido en planta i en periodo t}$$

$$y_{likt} = \text{Unidades de producto l enviado desde planta i a bodega k en periodo t}$$

$$z_{lkjt} = \text{Unidades de producto l enviado desde bodega k a ciudad j en periodo t}$$

2. Restricciones.

   a) Capacidad de Producción

$$\sum_{l=1}^{L} w_{lit} \leq S_{it}$$

   b) Satisfacción de demanda

$$\sum_{k=1}^{K} z_{lkjt} \geq D_{ljt}$$

c) Conservacin de flujo

$$\text{planta} \qquad w_{lit} = \sum_{k=1}^{K} y_{likt}$$

$$\text{bodega} \qquad \sum_{i=1}^{I} y_{likt} = \sum_{j=1}^{J} z_{lkjt}$$

d) Abastecerse de una sola bodega

$$z_{lkjt} \leq M\gamma_{kjt} \qquad M \gg 1$$

$$\sum_{k=1}^{K} \gamma_{kit} = 1$$

e) No ocupar bodegas cerradas

$$\text{recibir} \quad y_{likt} \leq Mx_{kt} \qquad M \gg 1$$

$$\text{enviar} \quad z_{lkjt} \leq Mx_{kt} \qquad M \gg 1$$

f) capacidad de bodegas

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{I} y_{likt} \leq Q_k \qquad \text{ó} \qquad \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} z_{lkjt} \leq Q_k$$

g) Envió mínimo

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{I} y_{likt} \geq L_k \qquad \text{ó} \qquad \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} z_{lkjt} \geq L_k$$

h) Lógicas

- Relación x_{kt} con α_{kt}

$$3\alpha_{kt} \leq \sum_{\tau=t}^{t+2} x_{k\tau} \leq 2 + \alpha_{kt} \qquad t = 1, 2, 3$$

- Relación z_{lkjt} con β_{kt}

$$(u_k - \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} z_{lkjt}) \leq (1 - 2\beta_{kt})M \qquad M \gg 1$$

3. Función Objetivo.

$$\text{mín}\, F = \sum_{lit} P_l w_{lit} + \sum_{likt} y_{likt}E_{lkt} + \sum_{likt} y_{likt}M_{likt} + \sum_{lkjt} z_{lkjt}N_{lkjt} + \sum_{kt} x_{kt}F_{kt} + \sum_{kt} \beta_{kt}B_k - \sum_{kt} \alpha_{kt}W$$

3.5. Problema 5

Douglas Pompkins es un prominente empresario que esta analizando su plan de inversiones para el próximo ao, para determinar en que proyecto invertir y que ejecutivos contratar para que administren cada uno de dichos proyectos. Para eso cuenta M posibles proyectos para desarrollar y con N posibles ejecutivos para administrarlos, debiendo asignar al menos un ejecutivo por cada proyecto. Sin embargo, no todos los ejecutivos tienen las habilidades técnicas para administrar todos los proyectos. En efecto, se conocen los parámetros a_{ij} que toma el valor 1 si el ejecutivo i esta capacitado para hacerse cargo del proyecto j y 0 si no lo está.

Los proyectos a elegir tienen una serie de condiciones técnicas que deben ser cumplidas:

- Para cada proyecto j existe un conjunto E_j de proyectos que no pueden ser realizados si el proyecto j es realizado y viceversa, es decir si se realiza el proyecto j no puede realizarse ningun proyecto en E_j y si se realiza algún proyecto en E_j no puede realizarse el proyecto j.
- Para cada proyecto j existe un conjunto I_j de proyectos que deben ser realizados si el proyecto j es realizado, es decir si se realiza el proyecto j deben realizarse tambien todos los proyectos en I_j y si existe algún proyecto en I_j que no se realiza, el proyecto j no puede realizarse.
- Para cada proyecto j existe un conjunto R_j de proyectos que son requisitos para la realización del proyecto j, es decir, para que el proyecto j sea realizado es necesario que todos los proyectos en R_j sean realizados.
- Para cada proyecto j existe un conjunto S_j de proyectos que son requisitos alternativos para la realización del proyecto j, es decir, para que el proyecto j sea realizado es necesario que al menos uno proyecto en S_j sean realizados.

Por último existen restricciones de índole financiera. Se sabe que un proyecto i requiere una inversión de p_j y tiene una rentabilidad esperada de u_j. Con esto se debe elegir una cartera de inversión tal que la rentabilidad esperada sea mayor que U y no se invierta mas de P.

Con los datos anteriores y suponiendo que para cada ejecutivo i existe un sueldo de contratación c_i, formule un modelo de programación binaria que permita determinar la cartera de inversión de modo de minimizar el costo total de contratación de los ejecutivos.

Solución

1. Variables de decisión.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si contrato al ejecutivo i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{Si realizo el proyecto j} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si asigno al ejecutivo i al proyecto j} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Restricciones.

   a) Proyectos que no pueden ser realizados si el proyecto j es realizado.

   $$z_k \leq 1 - z_j \qquad \forall k \in E_j \quad j = 1...M$$

   b) Proyectos que deben realizarse si el proyecto j es realizado.

   $$z_k \geq z_j \qquad \forall k \in I_j \quad j = 1...M$$

   c) Proyectos que deben realizarse todos para poder realizar el proyecto j .

   $$\sum_{k \in R_k} z_k \geq z_j \cdot |R_j| \qquad j = 1...M$$

   d) Proyectos que alguno debe realizarse para poder realizar el proyecto j.

   $$\sum_{k \in S_j} z_k \geq z_j \qquad j = 1...M$$

   e) Cota inferior a la utilidad esperada de la cartera de inversión.

   $$\sum_{j=1}^{M} u_j \cdot z_j \geq U$$

   f) Cota superior al dinero invertido en los proyectos.

   $$\sum_{j=1}^{M} p_j \cdot z_j \leq P$$

   g) Asignar al menos a un ejecutivo competente a los proyectos realizados.

   $$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \cdot x_{ij} \geq z_j \qquad j = 1...M$$

   h) No asignar a un ejecutivo que no he contratado.

   $$x_{ij} \leq y_i \qquad i = 1...N, j = 1...M$$

i) Naturaleza de las variables.

$$y_i, z_j, x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1...N, j = 1...M$$

3. Función Objetivo.

$$\text{mín } CTC = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot y_i$$

$\odot$