IN3701: Modelamiento y Optimización

Guía de problemas resueltos de Programación Lineal

Recopilado por André Carboni E.[1]

Versión final, Agosto 2010

[1] Cualquier comentario sobre esta guía o posibles errores de ortografía/resolución encontrados, por favor enviarlos a acarboni@ing.uchile.cl para su corrección en versiones futuras.

Palabras iniciales

Esta guía tiene como propósito entregar una serie de problemas resueltos de programación lineal (PPL), con el fin de que puedan estudiar y preparar de mejor forma sus controles de Modelamiento y Optimización (IN3701).

Se han seleccionado problemas de distinto nivel de dificultad, y se han tratado de ordenar según su nivel de dificultad, bajo el criterio totalmente subjetivo de quien escribe. Es indispensable para ustedes que resuelvan esta guía y entiendan cada uno de los problemas para estar bien preparados a la hora de resolver un control.

Noten que se han mantenido en varios problemas las notas y criterios de corrección, para que puedan hacerse una idea de cómo se corrigen. Además, en algunos problemas se han incluidos notas que explican los trucos más típicos a la hora de resolver un PPL.

Recuerden que cada control del curso contempla un problema de programación lineal, por lo que esta compilación de problemas les será útil a lo largo de todo el semestre. Si tienen consultas con respecto a la resolución de alguno de ellos, no duden en preguntarnos a través del foro del curso.

¡Éxito!

Índice

Problema 1: "Problema del azucarero"

Un comerciante compra azúcar a granel y vende al detalle. Para venderla tiene dos alternativas: envases de 1 kg y envases de 5 kg. El precio de venta es $300 y $250 por kg respectivamente, y en el mercado del azúcar al detalle se pueden vender 20.000 kg en envases de 1 kg y 17.000 en envases de 5 kg.

Debido a un contrato anterior se deben entregar 5.000 kg en envases de 5 kg a un determinado cliente.

El comerciante se puede abastecer de azúcar desde dos proveedores. El primero le puede vender hasta 15.000 kg a un precio de $90 por kg, y el segundo le ofrece la cantidad de azúcar que el comerciante desee, pero a un precio de $110 por kg y debido a requerimientos de sus distribuidores el comerciante debe vender menos del tercio del azúcar en envases de 1 kg.

Además, suponga que el precio de los envases y el proceso de envasado son nulos, y que el comerciante no tiene azúcar almacenada y vende todo el azúcar que compra.

Formule un problema de programación lineal que permita al comerciante decidir cual es el plan de abastecimiento y ventas de modo de obtener el mayor beneficio en su negocio.

Solución problema 1

Variables de Decisión

X_1 = Cantidad de envases de un 1 kg que vende el comerciante.

X_2 = Cantidad de envases de un 5 kg que vende el comerciante.

Y_1 = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 1.

Y_2 = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 2.

Restricciones

1. Limite superior de la demanda:

Azúcar en envases de 1 kg: $X_1 \leq 20.000$

Azúcar en envases de 5 kg: $X_2 \leq \dfrac{22.000}{5}$

2. Satisfacer compromisos previos

$$X_2 \geq \frac{5.000}{5}$$

3. Venta máxima del proveedor 1

$$Y_1 \leq 15.000$$

4. Requerimientos de los distribuidores

$$X_1 \leq \frac{Y_1 + Y_2}{3}$$

5. No existe almacenamiento (o todo lo que se envasa se vende)

$$X_1 + 5 \cdot X_2 \leq Y_1 + Y_2$$

6. No negatividad

$$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \geq 0$$

<u>Función Objetivo</u>

$$\max z = 300 \cdot X_1 + 1250 \cdot X_2 - 90 \cdot Y_1 - 110 \cdot Y_2$$

Problema 2: "Agencia de citas"

Los auxiliares de un curso de optimización de una universidad de gran prestigio, han decidido, para hacer un bien a los alumnos de su facultad, abrir una agencia de citas.

La cantidad de inscritos en la agencia es de M+N siendo M la cantidad de mujeres y N la cantidad de hombres. Se tiene, dadas las características demográficas de la facultad, que N>M.

Todos los inscritos se "ubican" entre ellos (solo de vista) y han informado confidencialmente a la agencia que la preferencia de una mujer m por emparejarse con un hombre n es de PMmn y la preferencia de un hombre n por emparejarse con una mujer m es de PHnm.

Adicionalmente a cada inscrito se le hace un test te personalidad y mediante un estudio, profundo y 100% certero, se determina si existirá compatibilidad entre cada combinación de parejas, obteniendo valores Cmn que serán 1 si la pareja del hombre n con la mujer m es compatible y 0 si la pareja no es compatible. Cada persona es compatible con al menos una pareja.

La agencia debe decidir a qué actividades enviar a cada pareja durante su cita (ej: ir al cine, a comer, etc) para esto la agencia cuenta con una variedad de A actividades y con un presupuesto fijo dado por PSPTO y se sabe que en cada actividad a la mujer m gastará Gma dependiendo del nivel de gasto al que esté habituado la mujer y se sabe que un hombre gasta Ka si realiza la actividad a, este gasto es igual para todos los hombres. Se tiene además que cada pareja no puede realizar más de tres actividades en su cita.

La preferencia de un hombre n por hacer la actividad a está dada por SHna y la preferencia de una mujer m por hacer la actividad a está dada por SMma.

Se sabe que una persona solo puede ser asignada una sola vez y que todas las mujeres deben tener pareja.

Los auxiliares del curso han decidido solicitar ayuda a sus alumnos pidiéndole a cada uno que formule un modelo de programación lineal entera para la primera ronda de citas, que maximice el nivel de satisfacción de preferencias.

Solución problema 2

Variables de Decisión:

$$X_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ Si se asigna la pareja del hombre n y la mujer m} \\ 0 \text{ Si no} \end{cases}$$

$$Y_{mna} = \begin{cases} 1 \text{ Si se asigna la actividad "a" a la pareja formada por el hombre n y la mujer m} \\ 0 \text{ Si no} \end{cases}$$

Restricciones:

1.- A cada hombre se le asigna a lo más una mujer.

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mn} \leq 1 \qquad \forall n = 1,\ldots,N$$

2.- A cada mujer se le asigna exactamente un hombre.

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mn} = 1 \qquad \forall m = 1,\ldots,M$$

3.- No se asigna si no hay compatibilidad.

$$X_{mn} \leq C_{mn} \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M$$

4.- Solo se puede tener actividades si se sale en la cita y las actividades no son más de tres.

$$\sum_{a=1}^{A} Y_{mna} \leq 3 \cdot X_{mn} \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M$$

Esta restricción también se puede separa en estas dos restricciones:

$$Y_{mna} \leq X_{mn} \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M; a = 1,\ldots,A$$

$$\sum_{a=1}^{A} Y_{mna} \leq 3 \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M$$

5.- No se pueden pasar del presupuesto para citas

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{a=1}^{A} \left[(G_{ma} + K_a) \cdot Y_{mna} \right] \leq PSPTO$$

6.- Naturaleza de las variables.

$$X_{mn}, Y_{mna} \in \{0,1\} \qquad \forall n = 1,\dots,N; m = 1,\dots,M; a = 1,\dots,A$$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left[(PM_{mn} + PH_{mn}) \cdot X_{mn}\right] + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{a=1}^{A}\left[(SH_{ma} + SM_{ma}) \cdot Y_{mna}\right]$$

Problema 3: "El legendario asado optimizador"

Nuestra amiga Thiarja Reca, reconocida coordinadora de un ramo de Optimización de una prestigiosa universidad, ha decidido al fin, tras largos años de expectación, historias y rumores, organizar el ya mítico "Asado optimizador". Thiarja cuenta con una lista de N posibles invitados a la fiesta, entre profesores, auxiliares, ayudantes y amigos varios del equipo

El centro de eventos donde se realizará el asado (la casa de uno de los ayudantes) le ha propuesto M posibles menús. Thiarja debe seleccionar el menú a servir en el asado (por ejemplo, choripanes, hamburguesas, etc), considerando que el mismo menú será servido a cada uno de los invitados, es decir, no habrá privilegios especiales para profesores o auxiliares, y que el costo de cada cena servida del menú m es PM_m. Si la persona i es invitada y el menú seleccionado es el m, éste consumirá LC_{im} litros de cerveza y LB_{im} litros de bebida. Se sabe que el litro de cerveza y bebida cuestan PLC y PLB respectivamente.

Adicionalmente, Thiarja cuenta con una reserva de RLC litros de cerveza y RLB litros de bebida que le han sobrado de su fiesta de cumpleaños, los cuales está dispuesta a donar para el asado, y cuenta con un presupuesto de P destinado a la realización del evento, dinero que fue otorgado por los generosos profesores.

Thiarja no invitará necesariamente a todos las personas de la lista para prevenir posibles problemas, incluso si esta persona es miembro del equipo de optimización. Por ello, debe considerar que:

- Un integrante que reciba una invitación asistirá con total seguridad al asado.
- En el caso de invitar a la persona i de la lista de posibles invitados, no será posible invitar a ninguna de sus antiguas parejas, con las cuales se mantienen diferencias irreconciliables. Este conjunto esta dado por E_i.
- En el caso de invitar a la persona i de la lista de posibles invitados, se deberá invitar forzosamente a cada una de las personas que el invitado i considera como mejores amigos. Este conjunto esta dado por A_i.
- Dentro de la lista de posibles invitados existe un conjunto de H parejas, razón por la cual, en el caso de extender una invitación a una persona casada, obligatoriamente la invitación debe ser extendida a su pareja. Considere que la pareja h esta formado por las personas h_1 y h_2 de la lista de invitados (es decir, las 2*H personas que están emparejadas están incluidas en la lista de potenciales invitados).

Tomando en cuenta todas estas consideraciones, ayude a Thiarja a formular el modelo de programación lineal mixto que le ayude a seleccionar el menú a servir en el asado y que le indique a qué personas invitar. Para esto, asuma que Thiarja desea invitar a la mayor cantidad de gente posible.

Solución problema 3

Variables:

$$W_m = \begin{cases} 1 & \text{Si elegí menú m para persona i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Z_{im} = \begin{cases} 1 & \text{Si persona i es invitada cuando elegí menú m} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$X_b =$ Litros de cerveza a comprar

$X_c =$ Litros de bebida a comprar

Nota: que se podría eliminar el índice m de la variable Z_{im}, ajustando las restricciones apropiadamente.

Restricciones:

1. Sólo escoge un menú:

$$\sum_m W_m = 1$$

2. Relación entre variables (sólo invito a una persona bajo el menú m si elegí el menú m):

$$Z_{im} \leq W_m \qquad \forall i, m$$

3. Compro bebida y cerveza sólo si me falta:

$$X_b \geq \sum_{i,m} Z_{im} * LB_{im} - RLB$$
$$X_c \geq \sum_{i,m} Z_{im} * LC_{im} - RLC$$

4. No sobrepasar el presupuesto:

$$\sum_{i,m} Z_{im} * PM_m + X_b * PLB + X_c * PLC \leq P$$

5. Si invito a persona i, no invito a sus ex parejas:

$$Z_{im} \leq (1 - Z_{jm}) \qquad \forall j \in E_i \;\; \forall i, m$$

6. Si invito a i, debo invitar a sus mejores amigos:

$$Z_{im} \leq Z_{jm} \qquad \forall j \in A_i \ \forall i, m$$

7. Si invito a un casado, invito a su pareja:

$$Z_{im} = Z_{jm} \qquad \forall (i, j) \in (h_1, h_2) \ \forall i, m$$

8. Naturaleza de las variables:

$$Z_{im} \in \{0,1\}, \quad W_m \in \{0,1\} \qquad \forall i, m$$
$$X_b \geq 0, \qquad X_c \geq 0 \qquad \forall b, c$$

Función objetivo:

$$\max \sum_{i,m} Z_{im}$$

Problema 4: "Pigmentos Lillo"

La empresa de pigmentos LILLO & Co. debe decidir cada día qué pigmento producir en su única máquina, eligiendo dentro del conjunto de I pigmentos que comercializa.

Por razones técnicas puede producir como máximo un tipo de pigmento por día, en cada uno de los t días de su horizonte de planificación modelado por el conjunto T, ya que sólo se puede hacer un set-up diariamente. El set-up consiste en ajustar la máquina para producir un pigmento especifico, si se sigue produciendo el mismo pigmento que el día anterior no es necesario realizar el set-up nuevamente.

Además, debe mantener la máquina funcionando todos los días en el horizonte de planificación para evitar fallas de funcionamiento. Para efectos de modelamiento se puede considerar el caso en que no está produciendo ningún pigmento diciendo que está produciendo el producto ficticio 0. La capacidad de producción de la máquina es muy superior a la demanda estimada para cualquier pigmento, por lo que no es considerada una restricción relevante.

Para cambiar de pigmento se debe pagar un costo de set-up cij que depende de los pigmentos i y j involucrados, ya que no es lo mismo cambiar entre pigmentos claros, oscuros, etc. Para efectos de modelamiento puede considerar que existe el costo cii = 0 $\forall i \in I$, y que en el periodo ficticio 0 del horizonte de evaluación la máquina estaba funcionando sin producir ningún pigmento. La demanda diaria para el pigmento i en el día t del horizonte de planificación ha sido estimada por el departamento de marketing en dit, y debe ser satisfecha durante el horizonte de planificación T, es decir, se permiten atrasos en la satisfacción de la demanda así como producir con anticipación algún pigmento en caso de ser necesario.

Los costos asociados a cada una de estas situaciones son bi por unidad y día de atraso del pigmento i, costo definido por las penalizaciones por atrasos fijadas por contrato con los clientes más una estimación del costo asociado a la pérdida de confianza de parte de los clientes. Y un costo hi por cada día y unidad de inventario almacenada del pigmento i (bi >> hi $\forall i \in I$), costo definido por los costos de almacenamiento y de operación de la bodega.

Considere que el stock inicial y la demanda adeudada inicial de todos los pigmentos son nulos. Para efectos de modelamiento considere que la demanda diaria y atrasada de cada pigmento se satisface instantáneamente, y sin costo de distribución relevante, al final de cada día en función de la cantidad producida y almacenada hasta el momento.

Modele el problema de producción de la empresa como un problema de programación lineal mixto, donde se asegura la satisfacción de la demanda a lo largo del horizonte de planificación minimizando los costos de set-up, y los costos por atrasos y por almacenamiento de productos en bodega.

Solución problema 4

Variables de decisión (1 pto.):

x_{it}: Cantidad que se produce del pigmento i en el periodo t.

s_{it}: Cantidad que se almacena del pigmento i al final del periodo t.

r_{it}: Demanda adeudada del pigmento i al final del periodo t.

y_{it}: Toma valor 1 si se produce el pigmento i en el periodo t. 0 en otro caso.

w_{ijt}: Toma valor 1 si se cambia del pigmento i al pigmento j al comienzo del periodo t.

Restricciones:

1. (0.6 ptos.) Naturaleza de las variables:

$$y_{it}, w_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j \in I, t \in T$$
$$x_{it}, s_{it}, r_{it} \geq 0 \qquad \forall i \in I, t \in T$$

2. (0.6 ptos.) Siempre mantener la máquina funcionando y sólo utilizar un pigmento por día

$$\sum_i y_{it} = 1 \qquad \forall t \in T$$

3. (0.6 ptos.) El stock y deuda inicial es cero

$$s_{i0} = 0 \qquad \forall i \in I$$
$$r_{i0} = 0 \qquad \forall i \in I$$

4. (0.6 ptos.) Relación entre las variables

$$x_{it} \leq y_{it} \cdot \sum_t d_{it} \qquad \forall i \in I, t \in T$$
$$x_{i0} = 0 \qquad \forall i \in I$$

5. (0.6 ptos.) Definición de w_{ijt}

$$w_{ijt} \geq y_{i(t-1)} + y_{jt} - 1 \qquad \forall i, j \in I, i \neq j \qquad \forall t \in T, t \neq \{0\}$$

6. (0.5 ptos.) Conservación del flujo

$$s_{i(t-1)} + x_{it} + r_{it} = d_{it} + r_{i(t-1)} + s_{it} \qquad \forall i \in I, \quad \forall t \in T, t \neq \{0\}$$

7. (0.5 ptos.) Satisfacer de la demanda a lo largo del horizonte de planificación

$$r_{iT} = 0 \qquad \forall i \in I$$

Función Objetivo (1 pto.)

$$\min \sum_{i,t} h_i s_{it} + \sum_{i,t} b_i r_{it} + \sum_{i,j,t} c_{ij} w_{ijt}$$

Problema 5: "El magnate Nelsón Divo"

El conocido magnate Nelsón Divo ha decidido mostrar al mundo su talento musical, y para ello, va a presentarse en un prestigioso certamen internacional. Lo más importante para él es la admiración del público, la cual se mide en aplausos.

Para su presentación, el señor Divo debe decidir qué instrumentos usar y por cuánto tiempo tocará cada uno, ya que sólo tiene T minutos para estar sobre el escenario. En su mansión posee N instrumentos y sabe que para cada instrumento i tiene un talento d_i [u.t.] (unidades de talento) del mismo. Además, debe tocar al menos K instrumentos distintos, dada su auto-denominación de "hombre orquesta". El multimillonario también tiene la opción de cantar, aunque para ello no tiene talento.

El público se divide en J sectores, cada uno de los cuales tiene distintas preferencias musicales. Lo anterior se traduce en que cada sector j se deleita en g_{ij} [u.s.] (unidades de satisfacción) por oír tocar el instrumento i, y en g_j [u.s.] por oír cantar. Sin embargo, en cada sector hay personas impacientes que generarán p_{ij} pifias por cada minuto que oigan el instrumento i y p_j pifias por cada minuto que oigan cantar. Suponga que cada pifia descuenta un aplauso, es decir, se miden en las mismas unidades. Nelsón no puede permitir que el total de pifias supere el nivel P, ya que esto afectaría irremediablemente su popularidad.

Cada sector j del público emitirá una cantidad de aplausos equivalente a su deleite por oír tocar cada instrumento (o el canto), independiente de su duración, y una cantidad equivalente al talento del artista en tal instrumento (o el canto) por cada minuto que dure.

Como a Nelsón Divo le interesa su popularidad en cada sector del público, él desea maximizar la mínima cantidad de aplausos obtenida entre todos los sectores. Plantee un modelo de programación lineal que permita al acaudalado personaje tomar las mejores decisiones para lograr su objetivo.

Solución problema 5

Variables de Decisión

$$x_i = \begin{cases} 1 & \textit{si toca el instrumento i} \\ 0 & \textit{si no} \end{cases}$$

$y_i = \min utos\ que\ toca\ instrumento\ i$

$$x = \begin{cases} 1 & si\ canta \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$y = \min utos\ que\ canta$

$A = cantidad\ mínima\ de\ aplausos\ entre\ todos\ los\ sectores\ del\ público$

<u>Restricciones:</u>

1. No sobrepasar el tiempo:

$$\sum_i y_i + y \leq T$$

2. Hombre orquesta:

$$\sum_i x_i \geq K$$

3. Relación entre variables:

$$y_i \leq x_i \cdot T \quad \forall i$$
$$y \leq x \cdot T$$

4. Máximo de pifias:

$$\sum_j \left(\sum_i \left(p_{ij} \cdot y_i \right) + p_j \cdot y \right) \leq P$$

5. Definición de A:

$$A \leq \sum_i \left(g_{ij} \cdot x_i + (d_i - p_{ij}) \cdot y_i \right) + g_j \cdot x - p_j \cdot y \quad \forall j$$

6. Naturaleza de las Variables:

$$y_i \geq 0 \quad \forall i$$
$$y \geq 0$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$
$$x \in \{0,1\}$$
$$A \in R$$

<u>Función Objetivo</u>:

$$Max\ A$$

Nota: *En este problema se pide "maximizar el mínimo" de algo. Sin embargo, en un PPL no podemos poner max{min{...}} en la función objetivo, pues esto no es lineal. Para solucionar esto, se agrega la restricción 5, que "minimiza" el valor de A y luego se maximiza A (¡truco típico!).*

En la restricción 5, la variable "A" es menor o igual que los aplausos en cada uno de los sectores ("para todo j"). En otras palabras, "A" es menor o igual que el sector que dio la MENOR cantidad de aplausos. Luego, al maximizar A, estamos maximizando la cantidad de aplausos que da el sector que da menos aplausos, que es lo que nos piden. Este es un truco típico que se usa siempre que tengan un problema de minmax o maxmin.

Problema 6: "Los colegios de Baraki Obamu"

El recién electo presidente de Estados Juntos, Baraki Obamu, ha decidido reestructurar la localización de los colegios en el estado de Mazachuset.

N es el conjunto de ciudades que hay que considerar; el subconjunto C de N contiene las ciudades donde puede haber un colegio (en una ciudad puede haber máximo un colegio).

C1 es el subconjunto de C donde ya existe un colegio.

En la ciudad i hay Ei estudiantes que tienen que ir a un colegio. Ningún estudiante puede viajar más de L kms. Dij es la distancia en kms entre las ciudades i y j; i,j$\in$ N (se puede asumir Dii=0).

Los colegios existentes (colegio tipo 1) tienen una capacidad para E estudiantes. Hay un nuevo tipo de colegio (colegio tipo 2) que tiene capacidad para EM estudiantes (E<EM).

El costo para construir un colegio del tipo t es de Ct UM (unidades monetarias), t=1,2. Se pueden construir colegios tipo 1 ó 2. El costo para cerrar un colegio existente es de CE UM.

Para la reestructuración de los colegios hay un presupuesto de PPTO UM.

Plantee un PPL que determine dónde cerrar y dónde construir colegios y que además asigne a los estudiantes a un colegio.

Suponga como función objetivo la minimización del costo total de la reestructuración.

¿Cómo cambia el modelo si en vez de minimizar el costo total se quiere minimizar la distancia total que tienen que viajar todos los alumnos?

Solución problema 6

<u>Variables de decisión</u>:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si mantengo el colegio i abierto} & i \in C1 \\ 0 \text{ caso contario} & \end{cases}$$

$y_{it} = \begin{cases} 1 \text{ si construyo colegio del tipo t en i} & i \in C \\ 0 \text{ caso contario} \end{cases}$

$z_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si asigno alumnos de i al colegio ubicado en j} & i \in N \quad j \in C \\ 0 \text{ caso contario} \end{cases}$

w_{ij} = número de alumnos de i que asigno a colegio ubicado en j $i \in N$ $j \in C$

<u>Restricciones</u>

1. Naturaleza de las variables

$$x_i, y_{it}, z_{ij} \in \{0,1\}$$

$$w_{ij} \in \mathrm{N}$$

2. Asigno si la distancia lo permite

$$z_{ij} \leq \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D_{ij}}} \qquad \forall i, j$$

3. Relaciones entre variables de asignación

$$w_{ij} \leq z_{ij} \cdot M \qquad \forall i, j$$, M >> 0, por ejemplo E_i

4. Todos los estudiantes son asignados

$$\sum_j w_{ij} = E_i \qquad \forall i$$

5. Para asignar el colegio, debe existir

$$z_{ij} \leq y_{j1} + y_{j2} + x_j \qquad \forall i, j \in C1$$

$$z_{ij} \leq y_{j1} + y_{j2} \qquad \forall i, j \in C / C1$$

NOTA: *hay distintas formas de trabajar el hecho de que sólo se pueden cerrar colegios que ya existen, por ejemplo, también se puede definir la variable* $x_i \quad i \in C$ *y hacer* $x_i = 0 \quad \forall i \notin C1$ *y luego tener cuidado con las sumatorias que involucran costos. (si se hace esto último hay restricciones que no son necesarias de escribir 2 veces)*

6. Capacidad de los colegios

$$\sum_{i} w_{ij} \leq y_{j1} \cdot E + y_{j2} \cdot EM + x_j \cdot E \qquad \forall i, j \in C1$$

$$\sum_{i} w_{ij} \leq y_{j1} \cdot E + y_{j2} \cdot EM \qquad \forall i, j \in C / C1$$

7. Colegios

$$y_{j1} + y_{j2} + x_j \leq 1 \qquad \forall i, j \in C1$$

$$y_{j1} + y_{j2} \leq 1 \qquad \forall i, j \in C / C1$$

8. Presupuesto

$$\sum_{jt \in C} y_{jt} C_t + \sum_{j \in C1} (1 - x_j) \cdot CE \leq PPTO$$

<u>Función Objetivo</u>

$$\min \{ \sum_{jt \in C} y_{jt} C_t + \sum_{j \in C1} (1 - x_j) \cdot CE \}$$

<u>Función Objetivo alternativa</u>

$$\min \sum_{i \in N, j \in C} w_{ij} D_{ij}$$

Problema 7: "Compañía de Cervezas Carboni"

La reconocida empresa CCC (Compañía de Cervezas Carboni), debido al aumento sostenido de la demanda de cerveza en los últimos años, desea evaluar la instalación de nuevas plantas de malta. Para ello, el gerente de operaciones de la compañía le explica a usted, brevemente, el proceso productivo de la cerveza.

Existen en la región una serie de plantaciones de cebada, propiedad de la compañía, de las que se extrae y transporta cebada a alguna de las plantas de malta de la empresa. Además, existe una pequeña fracción de cebada que es importada y llevada directamente a las plantas. La cebada es procesada en esta planta, produciendo la malta. Ésta es luego transportada desde la planta a la cervecería, donde se termina de producir la cerveza, o bien es exportada.

Existe un conjunto J de posibles localizaciones para las plantas, de las cuales un subconjunto J_A ya está ocupado por las plantas actuales. Considere que, como máximo, puede instalarse sólo una planta de malta por año y que el horizonte de tiempo para el problema es de T años ($|J \backslash J_A| > T$).

Considere que existe un conjunto I de proveedores de cebada (donde i=1 corresponde a las importaciones y el resto a las plantaciones) y un conjunto K de puntos de demanda de malta (donde k=1 corresponde a las exportaciones y el resto a cervecerías). Cada uno de estos puntos demanda una cantidad D_{kt} de malta en el año t.

Cada proveedor de cebada (incluyendo importaciones) puede ofertar como máximo A_{it} toneladas de cebada en el año t y la capacidad de producción de la planta de malta en la ubicación j es C_j cada año. Es importante considerar que no toda la cebada es utilizable para producir malta, debido a los altos estándares de calidad de la compañía. Estudios preliminares han identificado la calidad de la cebada en las distintas plantaciones, por lo que se ha estimado el parámetro r_i, que corresponde a la cantidad de malta que se puede producir con una tonelada de cebada de la plantación i.

Los costos se han estimado previamente, siendo a_{ijt} el costo de transporte de cebada de la plantación i a la planta de malta j en el año t, m_{jkt} el costo de transportar malta de la planta j al punto de demanda k en el año t y sjt el costo fijo por instalar una planta de malta en j en el año t.

Por último, por políticas de la empresa, considere que la cantidad de cebada importada debe corresponder a una proporción fija de la cantidad de malta exportada. Así, las toneladas de cebada importada no pueden ser menores al 80% ni mayores al 120% de las toneladas de malta exportada.

Plantee un modelo de programación lineal mixta, que permita decidir dónde instalar las nuevas plantas de malta y en qué año hacerlo, de modo de minimizar los costos totales en el horizonte de tiempo especificado y satisfaciendo la demanda en cada período. Para simplificar, considere que los efectos inflacionarios ya están considerados en los costos entregados.

Solución Problema 7

Variables:

$$Z_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{Si está instalada la planta de malta en la ubicación j en el año t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$X_{ijt} =$ Toneladas de cebada transportadas desde la plantación i a la planta j en el año t.

$Y_{jkt} =$ Toneladas de malta transportadas desde la plantación j al punto de demanda k en el año t.

***¡OJO!** La variable Zjt Vale 1 desde el momento en que se construye la fábrica hasta el final (es decir, si construyo en t=3, Zij={0,0,1,1,1,1,1....}). Esto se logra definir así gracias a la restricción 4. ¿Por qué se definió así? Pues simplemente porque facilita un par de restricciones. También se podría definir de la forma típica (vale 1 sólo en el momento en que se construye), pero habría que modificar las restricciones. Está resuelto de esta forma sólo para mostrar una forma distinta de resolver un problema como este :).*

Restricciones:

1) Satisfacer demanda:

$$\sum_j Y_{jkt} \geq D_{kt} \qquad \forall k,t$$

2) Cebada necesaria para producir malta:

$$\sum_k Y_{jkt} \le \sum_i r_i * X_{ijt} \qquad \forall j,t$$

3) Capacidad de las plantas:

$$\sum_k Y_{jkt} \le C_j \qquad \forall j \in J_A, t$$

$$\sum_k Y_{jkt} \le C_j * Z_{jt} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t$$

Nota: *Es esta restricción la que nos "obliga" a definir Zjt de la forma antes mencionada, ya que si no valiera 1 desde que se construye hasta el final, tendríamos problemas en los períodos posteriores a la construcción de la planta (por ejemplo, si construyo en t=3 entonces Zj3=1, pero si estamos ahora en t=4, Zj4 valdría cero y obligaríamos a que Yjkt=0). Igual existen formas de arreglar este problema (mediante el uso apropiado de sumatorias), pero preferí modelar el ppl de esta forma porque es un truco útil de saber ;).*

4) Una vez que se abre la planta, esta permanece abierta:

$$Z_{jt} \le Z_{jt+1} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t < T$$

5) Capacidad de producción de cebada:

$$\sum_j X_{ijt} \le A_{it} \qquad \forall i,t$$

6) Una planta de malta por año como máximo:

$$\sum_{j \in J \setminus J_A} (Z_{jt} - Z_{jt-1}) \le 1 \qquad \forall t$$

Nota: *Como Zjt vale 1 desde que construí hasta el final, al escribir de esta forma la restricción estamos considerando sólo 1 vez la construcción de la planta. Si no lo escribiéramos así y pusiéramos sólo la sumatoria de Zjt, tendríamos la suma de muchos 1's... ¡Prueben con números para la variable Z y vean que funciona! Por ejemplo si j=1, y Z1t={0,0,1,1,1} para t={1,...,5}, entonces (Z_{jt}-Z_{jt-1}) = (0-0) + (0-0) + (1-0) + (1-1) + (1-1) = 1. Se considera una sola vez la construcción de la planta ;).*

7) Cebada importada proporcional a malta exportada:

$$0{,}8 * \sum_j Y_{j1t} \le \sum_j X_{1jt} \le 1{,}2 * \sum_j Y_{j1t} \qquad \forall j,t$$

8) Condición de borde:

$$Z_{j0} = 0 \qquad \forall j \in J \setminus J_A$$

9) Naturaleza variables:

$$X_{ijt} \in \Re, Y_{jkt} \in \Re \;, Z_{jt} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,t$$

Fn. Objetivo:

$$\min\{\sum_{i,j,t} a_{ijt} * X_{ijt} + \sum_{j,k,t} m_{jkt} * Y_{jkt} + \sum_{t,j\in J\setminus J_A} s_{jt} * (Z_{jt} - Z_{jt-1})\}$$

Problema 8 "Ganando luquitas extra"

Usted está tratando de ganarse una "luquitas extras" y es por ello que está con 2 trabajos. El primero es de repartidor y el segundo es de garzón. Sobre el primero, este tiene las siguientes características.

Cada mañana usted llega a la bodega central a buscar los paquetes que debe repartir a lo largo de S sitios. Al final de la jornada usted debe volver a la bodega central. Para poder llevar a cabo de buena forma todas sus actividades, dispone de H unidades de tiempo para hacer este trabajo. El tiempo que demora en ir de un sitio a otro o desde la bodega a un sitio o de un sitio a la bodega es t_{ij} (considere la bodega como el sitio 0).

Es posible que usted no alcance a llegar a todos los sitios dentro de las H horas, en tal caso usted posee 2 alternativas. La primera es no ir a ese (esos) lugar(es), lo que le significa una disminución en su sueldo. Dicha disminución depende del sitio que no visitó, si no fue al sitio s ($s \in S$) la merma de sueldo equivale a P_s. O bien, usted puede visitarlos, pero cada unidad de tiempo que sigue trabajando como repartidor le significa una disminución de P unidades de su sueldo como garzón. Además, usted sabe que si llega muy tarde a la "pega" de garzón lo pueden despedir y como usted no quiere que esto ocurra, como máximo seguirá trabajando como repartidos HH unidades de tiempo por sobre las H establecidas.

Su misión ahora es realizar un PPL que le permita decidir su recorrido a través de los sitios, respetando las restricciones antes planteadas. No está demás decir que usted desea que sus ingresos se vean penalizados de la menor forma posible. Recuerde que usted no va a visitar necesariamente todos los sitios.

Solución problema 8

Variables de decisión

x_{ij}: 1 si va de sitio i a sitio j. 0 en caso contrario

T: unidades de tiempo extra que trabaja como repartidor

Restricciones

1. Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \in \{0,1\};\ T \in \Re^{+}$$

2. Sale de la bodega

$$\sum_{j} X_{0j} = 1$$

3. Regresa a la bodega

$$\sum_{j} X_{i0} = 1$$

4. Tiempo de trabajo

$$\sum_{i,j} X_{ij} t_{ij} \leq H + T$$

5. Si se entra a un lugar se sale de él. Si no se entra no se debe poder salir porque nunca se entro.

$$\sum_{i} X_{ij} = \sum_{i} X_{ji} \qquad \forall j$$

6. Entro a un lugar máximo una vez

$$\sum_{i} X_{ij} \leq 1 \qquad \forall j$$

7. Salgo a lo más una vez de un lugar

$$\sum_{j} X_{ij} \leq 1 \qquad \forall i$$

(Esta última restricción no es necesaria porque se tiene implícita con las otras 2 de más arriba (restricciones 5 y 6). También se podría omitir la restricción 6 si se escribe la 5 y la 7.

8. No se puede entrar al mismo lugar que donde uno esta

$$X_{ii} = 0 \qquad \forall i$$

(Esta restricción se podría omitir trabajando los sumandos de las sumatorias apropiadamente, usando "i distinto de j").

9. Límite de tiempo extra que se sigue trabajando como repartidor

$$T \leq HH$$

11. Evitar Sub-tours

$\sum_{i,j \in U} X_{ij} \leq |U| - 1$ $\forall$ U tal que 2≤|U|≤S-2, U $\subseteq$ sitios que no incluye la bodega.

o bien:

$\sum_{i,j \in U} X_{ij} \leq |U| - 1$ $\forall$ U tal que 2≤|U|≤S-2, con U $\subseteq$ sitios + la bodega.

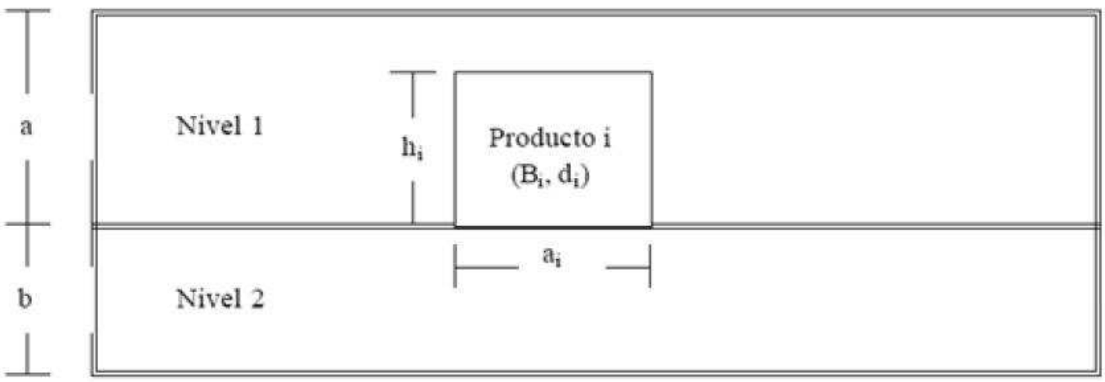
<u>Función Objetivo</u>

$$\min\{\sum_{i} P_i \cdot (1 - \sum_{j} X_{ij}) + P \cdot T\}$$

Problema 9: “Asignación de espacio de productos en góndolas”

Considere que debe definir el contenido diario de las góndolas de un supermercado decidiendo los productos que debe incluir en ella. Para ello usted sabe que la góndola tiene 2 niveles (ver figura), cada uno de un alto a y b centímetros, respectivamente. Además, ambos niveles tienen un ancho de L cm. y una distancia de fondo de P cm.

Por otro lado usted cuenta con I tipos de productos distintos, los cuales tienen cada uno un cierto alto, ancho y fondo, los que se denotan por h_i, a_i y p_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$, respectivamente. Cada producto puede estar presente sólo en uno de los dos niveles, y por razones de exposición de la marca sólo se pueden exponer apoyados en el ancho como se muestra en la figura. Obviamente existen productos más rentables que otros, por lo cual cada producto tiene un beneficio neto unitario Bi > 0, el cual incluye todos los beneficios y costos asociados a la venta de una unidad de producto i.



Adicionalmente se requiere que exista un mínimo de MIN_i unidades de cada producto en las góndolas de modo de garantizar una variedad y disponibilidad adecuada hacia los clientes, y se debe considerar que la cantidad que existe en la bodega del supermercado de cada producto es BOD_i. Considere que por tratarse del problema diario de ubicación de productos en la góndola, no se alcanza a solicitar y recibir productos adicionales a las existencias en bodega, y para efectos de modelamiento suponga que no hay reposición de productos durante el día.

Suponga que todo lo que se coloca en la góndola se vende, hasta un límite que ha sido estimado por el departamento de marketing para cada producto en $DMAX_i$, y que no se puede poner un producto distinto detrás de otro ni tampoco sobre otro. Por acuerdos comerciales con dos de los grandes productores de alimentos de lujo del país, los productos 1 y 2 deben estar en niveles distintos de la góndola en caso de exhibirse. Por otro lado, los productos 3 y 4 se venden en una oferta de pack, por lo que deben exponerse en el mismo nivel de la góndola.

Por acuerdos comerciales con la multinacional LG, al considerar tres productos cualquiera del conjunto LG de sus productos al menos uno de ellos debe estar expuesto en el nivel superior. Plantee un modelo de programación lineal entero mixto que permita encontrar la asignación de máximo beneficio de los distintos productos a la góndola teniendo en cuenta las características físicas de cada producto y de la góndola.

Solución problema 9

<u>Variables de decisión</u> (0.8 ptos):

Xij := Unidades del producto i incluidas en el nivel j

Zij := Corridas del producto i incluidas en el nivel j

Yij := $\begin{cases} 1 & \text{Si el producto i se expone en el nivel j} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$

<u>Restricciones</u> (0.4 ptos c/u):

1. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in N_0^+, Z_{ij} \in N_0^+, Y_{ij} \in \{0,1\}$$

2. Cada producto puede estar presente solamente en un nivel de la góndola:

$$\sum_j Y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1,...,n\}$$

3. Definición de zij y ancho de la góndola no debe ser superado:

$$Z_{ij} \geq X_{ij} \cdot \frac{p_i}{P} \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, \forall j \in \{1,2\}$$

$$\sum_i Z_{ij} a_i \leq L \qquad \forall j \in \{1,2\}$$

4. Altura de cada nivel de la góndola no debe ser superada por la altura de ninguno de los productos asignados a ese nivel:

$$h_i \leq a + M(1 - y_{i1}) \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, M >> 1$$

$$h_i \leq b + M(1 - y_{i2}) \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, M >> 1$$

Nota: *A esto se le conoce como "el truco de la gran M" y es muy habitual. Notar que si Y_{i2} vale 1 (el producto se expone en el nivel 2), h_i es menor o igual que "b" (la altura del nivel 2). En cambio, si Y_{i2} vale cero (el producto no se expone en el nivel 2), h_i es menor o igual que b+M con M tan grande como se quiera, por lo que es como si esta restricción no existiera. Es decir, M se elije tal que no afecte al valor de h_i para este caso, lo que tiene sentido pues si el producto no se pone en el nivel 2, "no importa" el tamaño del producto.*

5. Consistencia en la definición de y_{ij} :

$$X_{ij} \leq M \cdot Y_{ij} \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, \forall j \in \{1,2\} \ , M >> 1$$

6. Respetar la cantidad en bodega:

$$\sum_j X_{ij} \leq BOD_i \qquad \forall i \in \{1,...,n\}$$

7. Cantidad máxima que se puede vender:

$$\sum_j X_{ij} \le DMAX_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

8. Satisfacción de variedad y disponibilidad mínima:

$$\sum_j X_{ij} \ge MIN_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

9. Los productos 1 y 2 deben exponerse en distintos niveles, en caso de exhibirse:

$$Y_{1j} + Y_{2j} \le 1 \qquad \forall j \in \{1,2\}$$

10. Los productos 3 y 4 deben exhibirse en el mismo nivel de la góndola:

$$Y_{3j} = Y_{4j} \qquad \forall j \in \{1,2\}$$

11. De cada tres productos en LG al menos uno debe exponerse en el nivel superior:

$$\sum_{i \in S} X_{i1} \ge 1 \qquad \forall S \subset LG, |S| = 3$$

<u>Función Objetivo</u> (0.8 ptos):

$$\max \sum x_{ij} B_i$$

Problema 10: "Equipo de Handball Real Mandril"

El exitoso director técnico nacional, Miguel Tenderini, ha sido contratado por el prestigioso equipo de hándbol Real Mandril, el cual cuenta con un conjunto N de jugadores, todos estelares. Se le ha encomendado la misión de escoger las contrataciones para la próxima temporada de entre un conjunto M de posibles jugadores, cada uno de los cuales tiene un precio p_i con $i \in \{N+1,\dots,M\}$, y para ello se le ha otorgado un presupuesto de PPTO euros.

La temporada se compone de J partidos, en cada uno de los cuales, Tenderini debe decidir el conjunto jugadores que participará de él, tanto como titular o como suplente, suponga que debe haber T titulares y B suplentes por partido. Se sabe que g_{ij}^k es la cantidad de goles que anotará el jugador i en el partido j si entra como k (con $k \in \{Titular, Suplente\}$). Suponga que todos los suplentes entran al partido en algún momento.

Tenderini recibirá un bono al final de la temporada según la cantidad total de goles anotados, consistente en s_1 $[euros/gol]$ si este total queda en el intervalo $[0,G]$ y s_2 $[euros/gol]$ por cada gol adicional a G, menos un porcentaje α del monto gastado en nuevos jugadores, es decir, su bono será:

$$Bono = \begin{cases} s_1 g - \alpha \sum_{i \in M} p_i x_i & si\ g \le G \\ s_1 G + s_2 (g - G) - \alpha \sum_{i \in M} p_i x_i & si\ g > G \end{cases}$$ con $s_1 > s_2$.

Suponga que ya se contrató al famosísimo jugador Kakú $\in M$, y que se le prometió que sería titular en al menos el 75% de los partidos. Además, se sabe que si a mitad de temporada, (partido J/2) se han hecho menos de $\bar{G}$ goles, Tenderini será despedido. Por último, cada jugador tiene una resistencia física que le permite jugar a lo más t_i partidos como titular y b_i partidos como suplente.

Plantee un modelo de programación lineal que le permita a Miguel Tenderini maximizar el monto del bono que recibirá al final de la temporada.

Solución problema 10

<u>Variables</u>

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se contrata el jugador i} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

$$Y^K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si jugador i juega el partido j como k} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

Z = Cantidad de goles totales

Z_1 = Cantidad de goles en [0,G]

Z_2 = Cantidad de goles en (G,+infinito)

<u>Restricciones</u>

1. Naturaleza

$$X_i, Y_{ij}^k \in \{0,1\}$$
$$Z, Z_1, Z_2 \in Z_0^+$$

2. Presupuesto

$$\sum_{i \in M} X_i P_i \leq PPTO$$

3. No juega si no se contrata

$$Y_{ij}^k \leq X_i \qquad \forall i, j, k$$

4. No juega de titular y de suplente al mismo tiempo

$$Y_{ij}^{TIT} + Y_{ij}^{SUP} \leq 1 \qquad \forall i, j$$

5. Cantidad de jugadores titulares y suplentes por partido

$$\sum_i Y_{ij}^{TTT} = T \qquad \forall j$$

$$\sum_i Y_{ij}^{SUP} = B \qquad \forall j$$

6. Definición de z, z1 y z2

$$Z_1 \leq G$$

$$Z \leq Z_1 + Z_2$$

7. Calcular z

$$Z = \sum_{i,j,k} Y_{ij}^k g_{ij}^k$$

8. Kakú 75%

$$\sum_i Y_{KAKU,j}^{TTT} \geq 0.75J$$

9. Kakú contratado

$$X_{kaku} = 1$$

10. No ser despedido

$$\sum_{i,j\leq\frac{J}{2},k} Y_{i,j}^k g_{ij}^k \geq G$$

11. Capacidad Física

$$\sum_j Y_{ij}^{TIT} \leq t_i \qquad \forall i$$

$$\sum_j Y_{ij}^{SUP} \leq b_i \qquad \forall i$$

Función Objetivo

$$\max Z_1 S_1 + Z_2 S_2 - \alpha \sum_i p_i x_i$$

Problema 11: "Ruteo del bus para el asado optimizador 2.0"

El profesor de un curso de optimización, alias "El Lobo", ha prometido arrendar un bus para el próximo asado del curso, al cual serán invitados todos los alumnos del semestre junto al equipo docente. Pero El Lobo no sólo arrendará el bus, sino también ha prometido a los estudiantes que el bus pasará a buscarlos a un punto cercano a sus hogares. El Lobo cuenta con P posibles paraderos del bus y debe establecer cuales de estos paraderos visitará. Dado lo lejano del lugar del asado, un invitado no podrá llegar si el bus no pasa por su paradero. Si el bus decide parar en el paradero p una cantidad Dp de alumnos se subirá al bus y El Lobo quiere tener por lo menos una cantidad I de invitados (ya que sufre de depresión si ve que llegan menos).

Por otra parte, "La Feña", su jefa directa, exige que el bus pase por su paradero para poder asistir (suponga que el índice p=1 corresponde al paradero de La Feña) y exige una distribución relativamente equitativa de los paraderos a visitar. Para esto se ha dividido el territorio en 4 zonas t={norte, sur, este,oeste}, sabiendo que los paraderos de la zona t pertenecen al conjunto Zt y se ha exigido que si en cada zona t se visita un número n de paraderos, en las otras zonas no puedan visitarse más del doble ni menos de un tercio de paraderos. Suponga que el bus parte en la casa de El Lobo (paradero p=0), luego visita los distintos paraderos seleccionados y finalmente se dirige hasta el punto del asado (paradero p=9). Suponga, por simplicidad, que una vez que llega al paradero 9, el bus regresa vacío a la casa de El Lobo (p=0).

Además, El Lobo cuenta con un monto de dinero DIN que es lo máximo que se puede gastar en gasolina para el bus. Se sabe que el bus gasta L litros de gasolina por kilómetro, que el precio de la gasolina es de GAS pesos por litro y que la distancia entre los paraderos p y q es dpq kilómetros. Por otro lado, es sabido que los paraderos ubicados en la zona sur son considerados de mayor peligro, por lo que el conductor debe ir más rápido. Debido a ello, se gastará W litros adicionales de gasolina por cada kilómetro recorrido entre paraderos de esta zona.

Por último, El Lobo sabe que en el paradero p=3 viven sólo gente de un importante equipo de fútbol nacional, mientras que en el paradero p=7 vive sólo gente del equipo rival. Para evitarse problemas, se ha decidido que si se visita uno de estos paraderos primero, el otro debe visitarse al final (para minimizar el contacto entre estos alumnos y ahorrarse posibles problemas).

Se busca minimizar el costo de arriendo del bus el cual es directamente proporcional al número de personas que es capaz de transportar, por lo que en realidad busca minimizar la capacidad máxima de personas que puede llevar el bus, pero cumpliendo las restricciones expuestas anteriormente.

Ayude a El Lobo a resolver el problema anterior, modelando el problema como un problema de programación lineal entera.

Solución problema 11

Variables:

$$\text{Xpq} = \begin{cases} 1 & \text{Si el bus va del paradero p al paradero q} \\ 0 & \text{Sino.} \end{cases}$$

Y = Capacidad máxima del bus

Restricciones:

1.- Naturaleza de las variables.

$$X_{pq}, \in \{0,1\} \qquad Y \in \mathrm{N}$$

2.- Respetar mínima cantidad de invitados.

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{P} X_{pq} D_p \geq I \qquad (p \neq q)$$

3.- Ir a buscar a la Feña.

$$\sum_{p=1}^{P} X_{p1} = 1 \qquad (p \neq q)$$

4.- Distribución equitativa.

$$\frac{1}{3}\cdot\sum_{p\in Zu}\sum_{q=1}^{P} X_{pq} \leq \sum_{p\in Zt}\sum_{q=1}^{P} X_{pq} \leq 2\cdot\sum_{p\in Zu}\sum_{q=1}^{P} X_{pq} \qquad \forall t,u = \{norte, sur, este, oeste\}, t \neq u$$

5.- Presupuesto.

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{P} X_{pq}\cdot L\cdot d_{pq}\cdot GAS + \sum_{p\in Zsur}\sum_{q=1}^{P} X_{pq}\cdot W\cdot d_{pq}\cdot GAS \leq DIN$$

Nota: *Por simplicidad, suponemos que si un paradero está en la zona sur, se gastan los W litros adicionales solo para el tramo posterior a este paradero.*

6.- Capacidad.

$$Y \geq \sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{P} X_{pq}\cdot D_p$$

7. Paraderos equipos de fútbol.

$$X_{3q} \leq X_{79} \ \forall q \neq 9$$
$$X_{7q} \leq X_{39} \ \forall q \neq 9$$

8. Si llego a un paradero, tengo que salir de el.

$$\sum_{p=1}^{P} X_{pq} = \sum_{r=1}^{P} X_{qr} \qquad \forall q \in P$$

9. "No hay subciclos".

$$\sum_{\substack{p\in S\\ \{0\}\notin S}}\ \sum_{\substack{q\in S\\ \{0\}\notin S}} X_{pq} \leq |S| - 1 \qquad \forall S$$ subconjunto de paraderos P tal que $2 \leq |S| \leq P-2$

Nota: *Esta es la típica restricción del vendedor viajero donde no hay subciclos (o subtours). Sin embargo, en este caso tiene una salvedad: Debemos excluir el índice 0, que representa el punto de partida del bus. Esto porque en este problema el óptimo es, en efecto, un subciclo, ya que NO es necesario pasar por todos los paraderos. De no excluir el cero, el programa encontraría, obligatoriamente, un óptimo donde el bus pasa por todos los paraderos posibles y no es eso lo que* *buscamos. Siempre que no haya que pasar por todos los nodos y se use la restricción de los subtours, es necesario hacer esta restricción tal que no incluya al origen/destino. Les sugiero que le den una vuelta a esto para entenderlo, pueden hacer un dibujo pequeño con algunos nodos y ver qué pasa si agregan o no el cero en este caso.*

10. Condiciones iniciales.

$$\sum_{q=1}^{P} X_{0q} = 1 \ , \ \sum_{p=1}^{P} X_{p9} = 1 \ , \ X_{09} = 1$$

Función objetivo:

$$\min\{Y\}$$

Problema 12: "Carboni-Cola Company"

La multinacional líder en el mercado de bebidas de fantasía, Carboni-Cola Company, quiere mejorar la planificación de la producción de sus I marcas y el posterior embotellado en distintos formatos, el que genera J productos diferentes[2]. Para efectos de modelamiento considere conocido el parámetro Sij que vale 1 si el producto final j se produce con el producto genérico i, y 0 si no.

El proceso productivo comienza con M maquinas capaces de producir cualquiera de las I marcas, a una tasa PMmi por hora para la maquina m y la marca i. Luego, la producción se pasa a uno de los I estanques, uno para cada marca, donde puede almacenarse o traspasarse a una de las L líneas de embotellado.

Las líneas de embotellado son capaces de producir cualquiera de los J productos finales, y trabajan a una tasa PLlj por hora para la línea l y el producto final j. Cada máquina puede producir sólo una de las I marcas cada día y cada línea sólo puede embotellar un producto final por día. La jornada de producción diaria dura NH horas, y cuando se produce un cambio de marca en una maquina entre un día y el anterior es necesario dedicar TCG horas para realizarlo, análogamente cuando se produce un cambio de producto final entre un día y el anterior es necesario dedicar TCF hora para realizarlo.

El horizonte de planificación es de T días, y se conocen las demandas Djt para cada producto final j en el día t, las que deben ser satisfechas en algún momento durante los T días considerados. El inventario inicial de cada marca es conocido y son Si unidades, mientras que el inventario inicial de productos finales es nulo. Dado que el horizonte de planificación no es muy largo, se considera que los costos de producción son fijos una vez conocida la demanda, por lo que el interés de la empresa es minimizar el inventario de productos finales y de productos genéricos en los estanques. Además, se sabe que se puede dejar demanda insatisfecha en un periodo, satisfaciéndola en alguno de los siguientes días. Sin embargo, ejecutivos de la empresa estiman que el costo de no satisfacer una unidad de demanda por un periodo es igual a W veces el costo de mantener una unidad de inventario un periodo (W>>1).

Desarrolle un modelo de programación lineal mixto que permita resolver el problema de Carboni-Cola Company, es decir decidir cuánto producir y almacenar

[2] Por ejemplo, algunas de las I marcas pueden ser Carboni-Cola, Fantiego, Bucareite, etc, mientras que algunos de los J productos finales pueden ser Carboni-Cola de 500cc, Carboni-Cola de 1000cc, Fantiego de 500cc, etc. ("marca + tamaño/tipo envase").

de cada producto genérico y final en cada periodo, de modo de satisfacer la demanda durante el horizonte de planificación minimizando los inventarios y la demanda insatisfecha según sus costos relativos.

Solución problema 12

Variables:

$G_{mit} = \begin{cases} 1 & \text{Si el producto genérico i se produce en máquina m el período t} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$

GX_{mit} = Producción del producto genérico i en máquina m el período t

GI_{it} = Inventario del producto genérico i (en estanque i) al final del día t

$F_{ljt} = \begin{cases} 1 & \text{Si el producto final j se envasa en línea l el día t} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$

FX_{jt} = Producción del producto final j en la línea l el día t

FI_{jt} = Inventario del producto final j al final del día t

B_{jt} = Demanda insatisfecha del producto final j al final del día t

Nota: Siempre que hay un problema de inventario necesitarán una variable de producción y otra que lleve el inventario en stock para todo t. Además, si se permite demanda insatisfecha, siempre habrá una variable que lleva la cuenta de cuántas unidades "estamos debiendo" en cada período. Con este razonamiento, se deduce gran parte de las variables anteriores.

Restricciones:

1. Naturaleza de las variables:

$$G_{mit}, F_{ljt} \in \{0,1\}$$
$$GX_{mit}, GI_{it}, FI_{jt}, B_{jt}, E_{jt} \in \aleph$$

2.Sólo se puede producir un producto genérico por día en cada máquina:

$$\sum_i G_{mit} \leq 1 \qquad \forall m, \forall t \geq 1$$

3. Sólo se puede embotellar un producto final por día en cada línea:

$$\sum_j F_{ljt} \leq 1 \qquad \forall l, \forall t \geq 1$$

4. Capacidad de producción de máquina m para producto genérico i el día t:

$$GX_{mit} \leq NH * PM_{mi} * G_{mit} \qquad \forall m, i, \forall t \geq 1$$

5. Capacidad de máquina m si se cambia de producto genérico:

$$GX_{mit} \leq NH * PM_{mi} - TCG * PM_{mi} * (G_{mit} - G_{mi(t-1)}) \qquad \forall m, i, \forall t \geq 2$$

Obs: *Hasta aquí se supone implícitamente que el primer día no se paga el tiempo de cambio.*

6. Capacidad de envasado de la línea l para el producto genérico k el día t:

$$FX_{ljt} \leq NH * PL_{lj} * F_{ljt} \qquad \forall l, j, \forall t \geq 1$$

7. Capacidad de línea l si se cambia de producto final:

$$FX_{ljt} \leq NH * PL_{lj} - TCF * PL_{lj} * (F_{ljt} - F_{lj(t-1)} \qquad \forall l, j, \forall t \geq 2$$

8. Conservación de flujo en inventario de producto genérico:

$$GI_{it} = GI_{i(t-1)} + \sum_{m} GX_{mit} - \sum_{l,j} FX_{ljt} * S_{ij} \qquad \forall i, \forall t \geq 1$$

Nota: *Esta restricción siempre va (parecida) en todo problema de inventario.*

9. . Conservación de flujo en inventario de producto final:

$$FI_{j(t-1)} - B_{j(t-1)} + \sum_{l} FX_{ljt} = D_{jt} + FI_{jt} - B_{jt} \qquad \forall j, \forall t \geq 1$$

10. Satisfacer demanda total al final del horizonte de tiempo T:

$$B_{jT} = 0 \qquad \forall j$$

11. Condiciones de borde:

$$GI_{io} = S_i \qquad \forall i$$
$$FI_{j0} = 0 \qquad \forall j$$
$$B_{j0} = 0 \qquad \forall j$$

Función objetivo:

$$\min Z = \{\sum GI_{it} + \sum_{j,t} (FI_{jt} + B_{jt} * W)\}$$

Problema 13: "Banda de rock Los Brontosaurios de Bucarey" (versión full)

La legendaria banda de rock nacional los BRONTOSAURIOS está planeando su Tour Mundial. El líder de la banda, alias "Bronto Bucarey", lo ha contratado a usted para que maneje esta gira, que es sin duda una de la más esperada por todos sus fans a lo largo del planeta. Ellos tienen N ciudades disponibles donde tocar, y deben elegir en que ciudades tocar, y por contrato con la discográfica deben tocar en a lo menos N_{min} ciudades. Para cada par de ciudades, usted tiene el precio P_{ij} de desplazarse de una a la otra y además tiene R_i recintos en cada ciudad disponible para tocar. Sabe que tocar en el recinto i tiene un costo fijo de $CF_{r(i)}$ por arriendo, y tiene un costo

$CV_{r(i)}$ por llenar el recinto, por costos de seguridad extra (sólo se incurre en este último si el recinto se llena). La banda sólo realizará un concierto por ciudad.

Como los BRONTOSAURIOS son una banda con gran trayectoria, deben decidir qué y cuántos temas tocar. Ellos saben que si tocan un tracklist cargado a los temas clásicos, en la próxima ciudad que visiten ira más gente a verlos. Se estima que si la fracción de temas clásicos es mayor al D%, entonces se llenará el próximo recital de seguro. Por el contrario, si se toca un recital cargado a los nuevos temas, saben que se hará de mala fama la gira y le costará mucho más vender las entradas para el próximo concierto. Se estima que si toca menos de E% de temas clásicos, entonces incurrirá en un costo CE_i por tener que realizar más publicidad en la venta de boletos. Además, saben que deben tocar a lo largo de su tour más de Nc veces un repertorio con menos del E% de clásicos, para poder así promocionar sus últimas producciones ($Nc \leq N\min$).

La banda, por cuestiones de contrato, debe tocar a lo menos L^{min} temas y, por tiempo disponible, debe tocar a lo más L^{max}_{ri} en cada recinto donde decida tocar. Además, si de una ciudad a otra quieren disminuir el porcentaje de temas clásicos, deberán aumentar el número de canciones a tocar en el próximo tracklist.

Por último, usted sabe que el último concierto de la gira lo deberán hacer en Santiago (que lo puede pensar como la ciudad 0), y para cerrar la gira de forma gloriosa los BRONTOSAURIOS deberán tocar más de F% de temas clásicos y más canciones que en cualquier otra ciudad de la gira. Suponga por simplicidad que el concierto parte también en Santiago.

Construya un modelo de programación lineal que ayude a la banda a realizar su gira, abaratando costos.

Solución problema 13

Nota: *Esta es la versión extendida de un problema de control. Algunas de las restricciones fueron eliminadas del problema en dicha prueba (y al eliminar restricciones indirectamente se eliminan variables también), debido a su extensión. Dejamos aquí el problema completo para que lo puedan ver.*

<u>Variables:</u>

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si voy de la ciudad i a la ciudad j} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

$$Z_{ri} = \begin{cases} 1 & \text{Si realizo el concierto en el recinto r de la ciudad i} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

Ui = Cantidad de temas tocados en i

Ki = Fracción de temas clásicos tocados en i

$$V_{ri} = \begin{cases} 1 & \text{Si se llena el recinto r de la ciudad i} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{Si debo incurrir en costo de marketing adicional} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si Kj <= Ki} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

Nota: *Posiblemente se podía trabajar con menos variables. Quizás bastaba con crear una variable Xikjr que reemplaza a las primeras 3 y que vale 1 si voy de la ciudad i recinto k a la ciudad j recinto r, aunque esto no necesariamente facilita la resolución del problema, normalmente separar en varias variables hace más fácil la modelacion, al costo de aumentar el número de restricciones.*

Las últimas 3 variables se agregan por temas muy específicos. Por ejemplo, la variable Vri es necesaria para la función objetivo (si se llena el recinto incurro en un costo), al igual que la variable ti (si no toco suficientes temas clásicos, incurro en el costo de marketing adicional). La variable hij es para lograr una restricción que se pide al final del enunciado.

<u>Restricciones</u>:

1. Visitar al menos Nmin ciudades

$$\sum_{i,r} Z_{ir} \geq N_{\min}$$

2. Conservación de flujo (si llego a una ciudad debo salir de ella):

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = \sum_{i=1}^{N} X_{ji} \qquad \forall j = \{0,\dots,N\}$$

3. No se permiten subtours:

$$\sum_{i,j \in U} X_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall \text{ U tal que } 2 \leq |U| \leq \text{U-2}, \ \forall U \subseteq \{1,\dots,N\}.$$

Nota: *Sin el cero, pues en efecto el tour óptimo "es un subtour" (no necesariamente pasamos por todas las ciudades).*

4. Relación entre variables:

i. Sólo puedo ir de i a j si pasé por i: $\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = \sum_{r \in Ri} Z_{ir} \qquad \forall i$

ii. Sólo hay fracción de temas si paso por i: $K_i \leq \sum_{r \in Ri} Z_{ri} \qquad \forall i$

iii. El recinto se puede llenar solo si se toca ahi: $V_{rj} \leq Z_{rj} \qquad \forall i, r$

iv. Sólo puede haber costo de marketing si pasé por i: $t_i \leq \sum_{r \in Ri} Z_{ir} \qquad \forall i$

(notar que con 2 y 6.i logramos que $\sum_{r \in Ri} Z_{ir} \leq 1$*, por lo que no hace falta esa restr.)*

5. Limite de temas a tocar:

$$L^{\min} * \sum_{r\in Ri} Z_{ri} \leq U_i \leq \sum_{r\in Ri} L_{ri}^{\max} Z_{ri} \qquad \forall i = \{1,...,N\}$$

6. Si toco más de D% de clásicos entonces el próximo concierto se llena

$$(k_i - \frac{D}{100}) \leq V_{rj} + (1 - X_{ij}) \qquad \forall i, j = \{1,...,N\}$$

Nota: *D es un porcentaje, lo pasamos a fracción al dividir por 100. Si ki-D/100 es mayor que cero, entonces tocaron más de D% de temas y Vrj >="fracción positiva", con lo cual Vrj obligatoriamente valdrá 1 (por ser binaria). Si ki-D/100 es negativo, vrj >= "fracción negativa", con lo que puede valer 0 o 1. Sine embargo, valdrá cero siempre, pues es lo que minimiza los costos (mirar función objetivo) y con esto queda bien definida. Notar que para el caso en que NO vamos de i a j, Xij=0 y queda que ki-D/100 <=Vrj+1, y con ello da lo mismo si se tocan o no el D% de temas, la variable Vri valdrá siempre cero gracias al 1 que se agrega (recordar que ki es una fracción entre 0 y 1).*

7. Incurro en costo de marketing si toco menos de E% temas clásicos:

$$\frac{E}{100} - k_i \leq t_i$$

8. Tocar al menos Nc veces temas clásicos (i.e. incurro en costo MKT al menos Nc veces):

$$Nc \leq \sum_{i=1}^{N} t_i$$

9. Definición de h – "vale 1 cuando kj <=ki":

$$K_i \leq K_j + M * h_{ij} \qquad \forall i, j = \{1,...,N\}, M >> 0$$

Nota: *Si Ki <= Kj, entonces hij valdrá cero, pues la restricción se cumple sin necesidad de la M. En cambio, si Kj<=Ki, la desigualdad no se cumpliría, por lo que hij debe ser obligatoriamente 1. Con esto se logró definir hij (NO basta con decir que la variable vale 1 si Kj<=Ki, ES NECESARIO definirlo con esta restricción). La variable hij se define para poder plantear la restricción 11.*

11. Si disminuyo cantidad de temas clásicos entre i y j, aumento nº de canciones:

$$U_j - U_i \geq -M * (1 - h_{ij}) \qquad \forall i, j = \{1,...,N\}, M >> 0$$

10. Gran final en Santiago:

$$K_0 \geq \frac{F}{100}$$

$$U_0 \geq U_i \qquad \forall i = \{1,...,N\}$$

11. Naturaleza de las variables:

$$X_{ij}, Z_{ri}, V_{ri}, t_i, h_{ij} \in \{0.1\}$$
$$U_i \in \aleph; K_i \in \Re$$

<u>Función objetivo</u>:

$$\min\{\sum_{i,j} X_{ij} P_{ij} + \sum_{r,i} Z_{ri} * CF_{r(i)} + \sum_{r,i} V_{ri} * CV_{r(i)} + \sum_{i} CR_i * t_i\}$$

Problema 14: "Fábrica de televisores LCD"

Una fábrica de televisores LCD, dado el éxito en ventas de sus televisores producto del mundial, ha decido optimizar el uso de sus recursos para reducir los tiempos de producción y así generar una ventaja competitiva.

La empresa produce I modelos de televisores distintos, los cuales se deben procesar en M máquinas. Cada uno de los N modelos debe ser procesado en todas las máquinas, pasando siempre primero por la máquina 1, luego por la máquina 2, y así sucesivamente hasta terminar con la máquina M (todos los modelos pasan por las M máquinas en el mismo orden, dadas las similitudes entre ellos), tal como se muestra a continuación:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \quad \ldots \quad \rightarrow M$$

Sin embargo, algunos modelos de TV tardan más tiempo que otros en las máquinas, debido a sus características especiales. Suponga que el tiempo de proceso en la máquina m del modelo de TV i está dado por T_{im}.

1. Plantee un modelo de programación lineal entera para determinar el orden en que debe procesar los distintos modelos de televisores en las máquinas, de modo de minimizar el tiempo de tránsito total.
2. Suponga ahora que cada máquina es controlada por un operario. Suponga además que al departamento de operaciones se le ha asignado un presupuesto adicional PPTO para reducir los tiempos de producción. Usted ha decidido destinar este presupuesto para capacitar a sus trabajadores, con lo cuál reducirá en K_{im} el tiempo de proceso de un modelo de televisor i en la máquina m. La capacitación para el operario de la máquina m cuesta $W_{m.}$ ¿Cómo modificaría su modelo de la parte anterior para incorporar la decisión de a qué operarios capacitar?

Solución problema 14

<u>Variables</u>: (1 pto.)

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si se produce modelo de TV j después de modelo i} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

t_{im} = Tiempo de comienzo del proceso del modelo i en la máquina m

$tFINAL$ = Tiempo en que se termina de procesar el último modelo en la última máquina.

Restricciones:

1. Definición de tFINAL: (0,4 ptos.)

$$tFINAL \geq t_{iM} + T_{iM} \qquad \forall i$$

Nota: tFINAL es mayor o igual que todos los tiempos de proceso que llevan acumulados los trabajos en la máquina M. Así, el modelo i que tenga el mayor $t_{iM}+T_{iM}$ es el que le dará valor a la variable tFINAL, es decir, el último trabajo que pasó por esa máquina (pues es el que tiene mayor tiempo).

2. Se debe pasar por las máquinas en orden: (0,4 ptos.)

$$t_{i,m+1} \geq t_{i,m} + T_{i,m} \qquad \forall i, m \in \{1,...,M-1\}$$

3. Sólo se puede usar la máquina cuando está desocupada: (0,4 ptos.)

$$t_{jm} \geq t_{im} + T_{im} - (1 - X_{ij}) * M \qquad \forall i, m, M >> 0$$

Nota: *Las restricciones siguientes son para definir "la ruta", i.e. asegurarse de que se produzcan todos los modelos de televisores. <u>Es necesario agregar los nodos artificiales 0 e I+1</u>, después se mostrará por qué. ¡Las restricciones 4,5,6 y 7 son típicas restricciones de flujo en redes!*

4. De cada nodo sale un arco: (0,4 ptos.)

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{I+1} X_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

5. A cada nodo llega un arco: (0,4 ptos.)

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{I+1} X_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

6. Evitar subtours: (0,4 ptos.)

$$\sum_{i,j \in U} X_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subseteq \{0,1,...,I,I+1\} \text{ t.q. } 2 \leq |U| \leq I-2$$

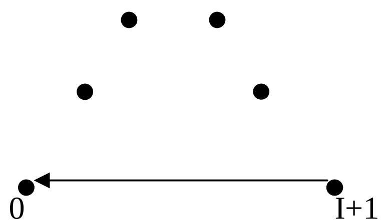
Nota: *Ojo con el conjunto U, subconjunto de los nodos del 0 al I+1.*

7. Condición de borde para que funcione bien la restricción 6 (existe el arco entre nodos I+1 y 0): (0,4 ptos.)

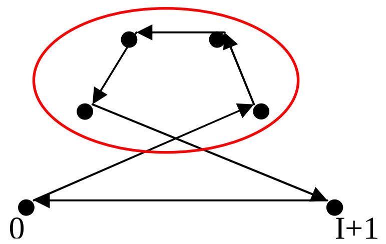
$$X_{I+1,0} = 1$$

Ejemplo: *La idea es crear una ruta desde el trabajo que se realiza primero hasta el trabajo que se realiza al final, pero esta ruta no regresa al origen como en problemas de transporte o flujo en redes típicos (ej: vendedor viajero). Una vez que llegamos al último nodo nos quedamos ahí, por lo que hay que crear los nodos artificiales 0 e I+1 y obligar a que exista el arco de I+1 a 0. Con el dibujo a continuación se muestra por qué esto funciona:*

Configuración inicial, donde se realizan I=4 modelos de TV distintos Los nodos artificiales 0 e I+1=5 fueron agregados junto con el arco:



Ahora se muestra una posible configuración final factible de acuerdo a las restricciones que hemos puesto:



Se encontró una ruta entre los 4 nodos originales de la red, y NO existe un camino entre el último nodo revisado y el primero, que es lo que se quería evitar con los nodos artificiales. Los tiempos en los nodos artificiales no nos afectan en nada dado los límites de la restricción 3, para i de 1 hasta I (sin considerar los nodos artificiales).

8. Naturaleza de las variables: (0,2 ptos.)

$$X_{ij} \in \{0,1\}; t_{im} \geq 0, tFINAL \geq 0 \qquad \forall i, m$$

<u>Función objetivo</u>:

$$\min\{tFINAL\}$$

Nota: Ver restricción 1

2.

<u>Agrego variable</u>: (0.3 ptos.)

$$Y_m = \begin{cases} 1 \text{ si capacito al operario de la máquina m} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

<u>Cambio las siguientes restricciones</u>: (0,2 ptos. c/u)

- Agrego el término $-K_{im}*Y_m$ que representa ahorro en tiempo si capacito a m

  1. $tFINAL \geq t_{iM} + T_{iM} - K_{iM} * Y_M$

  2. $t_{i,m+1} \geq t_{i,m} + T_{i,m} - K_{im} * Y_m$

3. $t_{jm} \geq t_{im} + T_{im} - K_{im} * Y_m - (1 - Xij) * M$

El resto de las restricciones queda igual.

Agrego restricciones:

7'. Naturaleza de la variable nueva: (0,2 ptos.)

$$Y_m \in \{0,1\} \qquad \forall m$$

8. Respetar presupuesto: (0,4 ptos.)

$$\sum_{m=1}^{M} Y_m * W_m \leq PPTO$$

Función objetivo queda igual.

Problema 15: "Firma de arriendo de automóviles"

Una firma de arriendo de automóviles desea planificar su inventario de vehículos para los siguientes T días. La firma posee una flota fija en el horizonte de planificación compuesta de dos tipos de vehículos: económicos (e) y lujosos (l). La firma posee I sucursales y ofrece el servicio "rent-it-here and leave-it-there", lo que permite a sus clientes retirar un vehículo en una sucursal y devolverlo en cualquier otra. Se ha definido que cada arriendo puede durar desde 1 día hasta K días. Por lo tanto, para efectuar un arriendo cada cliente debe especificar: la sucursal de retiro, la sucursal de entrega, el día de comienzo del arriendo, la cantidad de días de arriendo y el tipo de vehículo que desea arrendar. Al inicio del horizonte de planificación hay R_{iht} vehículos tipo $h \in \{e,l\}$ que ya están arrendados y que deben ser devueltos el día $t \in \{1,...,T\}$ (para t > K R_{iht} =0) considere en la sucursal $i \in \{1,...,I\}$. Además, también al inicio del horizonte, la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ cuenta con un inventario de W_{ih} vehículos del tipo $h \in \{e,l\}$.

El departamento de estudios de la firma ha determinado que el precio y la demanda por arriendos con retiro en la sucursal $i \in \{1,...,I\}$, entrega en la sucursal $j \in \{1,...,I\}$, a partir del día $t \in \{1,...,T\}$, de un vehículo del tipo $h \in \{e,l\}$ y con una duración de $k \in \{1,...,K\}$ días, es de p_{ijt}^{hk} pesos y μ_{ijt}^{hk} unidades respectivamente. Si no existe disponibilidad de vehículos tipo económico, la firma puede actualizar a los clientes que los demandan entregándoles un vehículo tipo lujoso al precio de uno económico. Un cliente que demanda un vehículo tipo lujoso por ningún motivo aceptará que se le entregue un vehículo tipo económico. El costo de no satisfacer la demanda de un cliente que solicita un arriendo de un vehículo tipo $h \in \{e,l\}$ por $k \in \{1,...,K\}$ días es de CD_{hk}, independiente del periodo y de las sucursales de retiro y devolución.

La firma ha establecido que en cada periodo debe ofrecer un nivel de servicio del 98% a los clientes que demandan vehículos lujosos. Es decir, en cada periodo a lo más un 2% de este tipo de clientes puede quedar con su demanda insatisfecha.

Para que esto sea posible, la firma puede aumentar su disponibilidad de vehículos lujosos arrendando vehículos externos o realizar traslados de vehículos entre algunas sucursales para aumentar la capacidad de las sucursales que enfrentan mayor demanda. El costo para la firma de arrendar un vehículo externo para satisfacer la demanda en $t \in \{1,...,T\}$ de un cliente lujoso que retirará el vehículo en la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ y que luego de $k \in \{1,...,K\}$ días lo devolverá en la sucursal $j \in \{1,...,I\}$, es de CA_{ijt}^{k}. Suponga para el caso anterior, que el vehículo externo es llevado a la sucursal i en t, inmediatamente es entregado al cliente quien lo devuelve en la sucursal j en $t+k$, e inmediatamente el vehículo es devuelto al proveedor de éste. El parámetro f_{ij} es uno si es factible realizar traslados entre las sucursales $i \in \{1,...,I\}$ y la $j \in \{1,...,I\}$ y cero en caso contrario. El costo de trasladar un vehículo tipo $h \in \{e,l\}$ desde la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ a la $j \in \{1,...,I\}$ en el periodo $t \in \{1,...,T\}$ es de CT_{ijt}^{h}. Existe un presupuesto de B destinado para este fin a lo largo del horizonte.

En la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ existe una capacidad de almacenar hasta H_i vehículos cada noche. Cada sucursal $i \in \{1,...,I\}$ tiene la posibilidad de aumentar su capacidad de almacenamiento en E_i unidades pagando un costo fijo de CF_{it} en el periodo $t \in \{1,...,T\}$, este aumento de capacidad dura sólo 1 periodo. El costo de almacenar cada noche un vehículo en la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ es de CI_i.

Plantee un modelo de programación lineal que permita que la firma planifique de forma centralizada su inventario de vehículos de forma de maximizar sus utilidades.

Comentarios: Suponga que CA_{ijt}^{k} es tal que $CA_{ijt}^{k} > p_{ijt}^{lk}$ $\forall k \in \{1,...,K\}$, $\forall i, j \in \{1,...,I\}$, $\forall t \in \{1,...,T\}$. Es decir, el costo al que puede arrendar la firma un vehículo lujoso externo es superior al beneficio que éste genera al arrendarlo al cliente que lo demanda. Suponga también que en cada $t \in \{1,...,T\}$ puede suceder o no que $CD_{lk} < CA_{ijt}^{k} - p_{ijt}^{lk}$. Por lo tanto, en algunos periodos puede convenir a priori dejar demanda insatisfecha que arrendar un vehículo externo (aunque la firma podría verse obligada a arrendar para cumplir con el nivel de servicio), pero en otros no.

Solución Problema 15

<u>Variables de decisión:</u>

X_{ijt}^{hk} = Autos tipo h destinados para arriendos, de i a j en t, por k días.

Y_{ijt}^{h} = Envíos de autos tipo h, de i a j, en t.

S_{ijt}^{hk} = Demanda insatisfecha por autos tipo h, de i a j en t, por k días.

I_{it}^{h} = Inventario de autos tipo h disponibles en t, en la sucursal i (al final del día).

V_{ijt}^{k} = Autos lujosos destinados a satisfacer demanda económica, de i a j en t, por k días.

A_{ijt}^{k} = Autos lujosos extra, arrendados para satisfacer la demanda de i a j en t, por k días.

$$Z_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Si aumenta capacidad de sucursal i en t.} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

<u>Restricciones</u>:

1. Inventario autos económicos:

$$I_{it}^{h} = I_{i,t-1}^{h} + R_{iht} + \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{t-1,K\}} X_{\theta,i,t-k}^{hk} - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} X_{i,\theta,t-k}^{hk} + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

(∀ t > 1, h=e)

$$I_{it}^{h} = W_{ih} + R_{iht} - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} X_{i\theta t}^{hk} + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

(∀ t=1, h=e)

2. Inventario autos lujosos:

$$I_{it}^{h} = I_{i,t-1}^{h} + R_{iht} + \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{t-1} (X_{\theta,i,t-k}^{hk} + V_{\theta i,t-k}^{k}) - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} X_{i,\theta,t-k}^{hk} + V_{\theta it}^{k}) + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

(∀ t>1, h=l)

$$I_{it}^{h} = W_{ih} + R_{iht} - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} (X_{i\theta t}^{hk} + V_{i\theta t}^{k}) + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

(∀ t=1, h=l)

Nota: También podían definir esta última como $I_{i0}^{h} = W_{ih}$ y dejar la anterior para todo t.

3. Demanda económicos:

$$X_{ijt}^{ek} + V_{ijt}^{k} = \mu_{ijt}^{ek} - S_{ijt}^{ek}$$

($\forall i, j \in I, k \in \{1,\ldots,K\}, t \in \{1,\ldots,T\}$)

4. Demanda lujosos:

$$X_{ijt}^{lk} + A_{ijt}^{k} = \mu_{ijt}^{lk} - S_{ijt}^{lk}$$

$$(\forall i, j \in I, k \in \{1,...,K\}, t \in \{1,...,T\})$$

5. Nivel de servicio:

$$\sum_{i,j,k} S_{ijt}^{lk} \leq 0{,}02 * \sum_{i,j,k} \mu_{ijt}^{lk}$$

$$(\forall t \in \{1,...,T\})$$

6. Factibilidad de envíos:

$$Y_{ijt}^{h} \leq M * f_{ij}$$

$$\forall i, j \in I, h \in \{e,l\}, t \in \{1,...,T\}, M >> 0$$

7. Capacidad almacenaje:

$$\sum_{h} I_{it}^{h} \leq H_i + E_i * Z_{it}$$

$$\forall i \in I, t \in \{1,...,T\}$$

8. Presupuesto:

$$\sum_{i,j,t,h} CT_{ijt}^{h} * Y_{ijt}^{h} \leq B$$

<u>Función objetivo</u>:

$$\max\{ \sum_{i,j,k,t} (X_{ijt}^{ek} + V_{ijt}^{k}) p_{ijt}^{ek} + \sum_{i,j,k,t} (X_{ijt}^{lk} + A_{ijt}^{k}) p_{ijt}^{lk} - \sum_{ijkth} S_{ijt}^{hk} CD - \sum_{ijkt} A_{ijt}^{k} CA_{ijt}^{k}$$

$$- \sum_{ijkt} Y_{ijt}^{h} CT_{ijt}^{h} - \sum_{ith} I_{it}^{h} CI_i - \sum_{it} Z_{it} CF_{it} \}$$

Problema 16: "Set covering, set packing y set partitioning"

1) Consideremos M = {1,...,m}, N = {1,...,n}, y sean $M_j \subseteq$ M para j $\in$ N. Decimos que F$\subseteq$N cubre (covers) M si M= $\bigcup_{i \in F}$ Mi. Decimos que F$\subseteq$N es un empaquetamiento (packing) con respecto a M si $M_i \cap M_j$ = Ø $\forall$ i$\neq$j$\in$ F. Finalmente, decimos que F$\subseteq$N es una partición (partition) de M si es un covering y un packing al mismo tiempo. Supongamos que escoger el conjunto M_j tiene un costo/beneficio de c_j.

Formule el problema de obtener un cover, un packing y un partition F de costo/beneficio mínimo como un problema lineal entero, suponiendo:

M = {1,2,3,4,5};	N = {1,2,3,4}
M_1 = {1,2,3}	$c_1 = 1$
M_2 = {3,4}	$c_2 = -6$
M_3 = {3,4,5}	$c_3 = -5$
M_4 = {1,2}	$c_4 = 2$

y encuentre el óptimo en cada caso.

Hint: Para la formulación, arme una matriz A que utilice de manera apropiada en las columnas la composición de los conjuntos M_j y elija el vector b conveniente.

2) Considere P_i:={ $x \in \Re^n_+ : A_i x \leq b_i, x \leq d$ } para i=1,...,m. Definimos Y_k:={ $x \in \Re^n$: existen al menos k conjuntos P_i tales que $x \in P_i$}.

Formule el espacio de soluciones factibles de Y_k como un problema entero mixto.

Nota: Para cada P_i existe w_i tal que $\forall\, 0 \leq x \leq d$ se tiene que $A_i x \leq b_i + wi$.

Hint: Utilice una variable binaria que valga 0 si x no está en P_i.

Solución Problema 16

1) Se deben plantear 3 ppl, uno para set covering, uno para set packing y otro para set partitioning. El planteamiento general de estos problemas es el siguiente:

Set Covering:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i \in Mj,\ \forall i = 1,...,m\ ;\ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & si\ j \in F,\ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M debe estar contenido al menos una vez en alguno de los Mj:

$$\sum_j a_{ij} * x_j \geq 1 \qquad \forall i = 1,...,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

(También era valido poner maximización de acuerdo al enunciado)

Set Packing:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i \in Mj,\ \ \forall i = 1,...,m\ \ ;\ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & si\ \ j \in F,\ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M puede estar a lo más una vez en alguno de los Mj (no puede estar en 2 Mj diferentes, pues sino la intersección de estos no sería vacía):

$$\sum_j a_{ij} * x_j \leq 1 \qquad \forall i = 1,...,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

(También era valido poner maximización de acuerdo al enunciado)

Set Partitioning:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i \in Mj,\ \ \forall i = 1,...,m\ \ ;\ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & si\ \ j \in F,\ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M debe estar en alguno de los Mj, y sólo en uno de ellos (covering + packing):

$$\sum_j a_{ij} * x_j = 1 \qquad \forall i = 1,\dots,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

***Nota de corrección**: En el enunciado no se pide escribir el problema general, por lo que es válido si el alumno plantea estos problemas para el caso particular dado. En ese caso, se debe escribir la matriz A del caso particular:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el modelo queda igual al anterior, sólo que la restricción 1 queda:

$$A * x = e$$

siendo A la matriz anteriormente definida y "e" un vector de 1s. (ojo que este es el caso para el set partitioning, en el set packing y set covering va con la desigualdad respectiva).

Los óptimos para cada caso son:

Set covering: x1 = x2 = x3 = 1, x4 = 0. Con esto, z = -10

Set packing: x2 = 1, x1 = x3 = x4 = 0. Con esto, z = -6

Set partitioning: x3 = x4 = 1, x1 = x2 = 0. Con esto, z = -3

***Criterio de corrección**: Encontrar el óptimo para cada caso no debe valer más de 0,1 pto por caso, esto se pide sólo para facilitar la visualización del problema. Lo importante aquí es plantear el modelo, por lo tanto, cada modelo vale 0,9 pts (0,3 por crear la variable correctamente, 0,5 por escribir bien la restricción 1 y 0,1 por la naturaleza de las variables -> Escribir solo la matriz A no da puntaje).*

2)

Variables:

X = Puntos en el espacio

$$t_i = \begin{cases} 1 & si\ x \in P^i, \quad \forall i = 1,...,m \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Nota: *En estricto rigor, t_i puede valer tanto 1 como 0 cuando x está en Pi (analizar restricción 1 para ver que esto es cierto). El alumno debe señalar esto para tener todo el puntaje de la segunda variable.*

Restricciones:

1.- Si x pertenece al poliedro i, debe cumplirse que Aix ≤ bi:

$$A_i * x \leq b_i + wi * (1 - t_i) \qquad \forall i = 1,...,m$$

2.- x debe estar en al menos k poliedros

$$\sum_i t_i \geq k$$

3.- X acotado entre 0 y d

$$0 \leq x \leq d$$

4.- Naturaleza de las variables:

$$t_i \in \{0,1\} \quad ; \quad x \in \Re^n$$

Nota: *Este problema no tiene función objetivo, se pedía un espacio de soluciones..*

Criterio de corrección*: 0,4 cada variable. 0,7 restricción 1. 0,6 restricciones 2 y 3. 0,3 naturaleza de las variables.*