PAUTA AUX 1.

introducción al cálculo
PRIMAVERA 2024
sección 3

Ygnacio Dagach Abugattas.

IMPORTANTE:

Utilicen la PAUTA junto al HOW TO: ______, en el HOW TO están las explicaciones a todos los primeros pasos de los ejercicios tipo P2 y P3.

EN el desarrollo de LA PAUTA se asumirá hacen los ejercicios junto al HOW TO: ___

ramo: Introducción al Cálculo fecha: / / s: c: a:

Ygnacio Dayach Abugattas

Pauta Aux 1

P1. a) PDQ: el inverso aditivo es único.

P1 a) Razonando por contradicción, dado que la existencia de al menos 1 está garantizada por teorema de existencia, supongamos existe más de 1 elemento neutro y llegaremos a una contradicción.

(Utilizaremos $n=2$ elem. neutros pues aparece la contradicción, y en el caso $n>2$ particularmente hay 2 elem. neutros llegando igualmente a la contradicción)

Sean $e_1, e_2 \in \mathbb{R}$ elementos neutros tales que $e_1 \neq e_2$ (*)

$\Rightarrow$ como e_1 y e_2 son elem. neutros

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{x \cdot e_1 = x}_{(1)} \quad \wedge \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \underbrace{x \cdot e_2 = x}_{(2)}$$

luego tomando $x = e_2$ en (1) y $x = e_1$ en (2) tenemos que:

$$\underbrace{e_2 \cdot e_1 = e_2}_{(1)} \quad \wedge \quad \underbrace{e_1 \cdot e_2 = e_1}_{(2)}$$

con esto, usando Ax. de conmutatividad en (1)

$$\underbrace{e_1 \cdot e_2 = e_2}_{(1)} \quad \wedge \quad \underbrace{e_1 \cdot e_2 = e_1}_{(2)}$$

concluyendo que $e_2 = e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2 = e_1$ con lo que $e_2 = e_1$

obteniendo la contradicción con (*) concluyendo que no puede haber + de 1 elem. neutro y dado que tenemos la existencia por teo. se concluye la unicidad

ramo:

a:

El inverso multiplicativo es único

siempre que tenga sentido

Bajo el mismo argumento de la P1.a)

supongamos existen 2 elementos inversos distintos de algún real $x \neq 0$, sean estos: $P1, P2 \in \mathbb{R}$

como sabemos $\quad x \cdot P_1 = 1 \quad (1)$

$\quad x \cdot P_2 = 1 \quad (2)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P_1 &= P1 \cdot 1 && \text{Ax. elem. neutro}\\
&= P1 \cdot (x \cdot P_2) && (2)\\
&= (P1 \cdot x) \cdot P_2 && \text{Ax. asociatividad}\\
&= (x \cdot P_1) \cdot P_2 && \text{Ax. conmutativ.}\\
&= 1 \cdot P_2 && (1)\\
&= P_2 \cdot 1 && \text{Ax. conmutativ.}\\
&= P_2 && \text{Ax. elem. neutro}
\end{aligned}
$$

concluyendo que $P_1 = P_2$

y bajo el mismo argumento de la P1.a) se concluye la unicidad del elemento inverso.

b) Sea $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto regido por los siguiente axiomas:

A1$[3 \in \Theta, 7 \notin \Theta]$ **A2** $[x \in \Theta \implies 3x+1 \in \Theta]$ **A3** $[x, y \in \Theta \implies x+y \in \Theta]$

Demuestre, justificando cada paso, que:

i) $1 \notin \Theta$

ii) $x, y \in \Theta \implies 3x+2y+4 \in \Theta$

iii) $x, y \in \Theta \implies 4-x-y \notin \Theta$

iv) $3x+y+4 \notin \Theta \implies x \notin \Theta \vee \frac{y}{2} \notin \Theta$

v) No existe un $x \in \Theta$ tal que $3(2x-1) = 39$

P1 b i)

Como solo tenemos información cuando un elemento PERTENECE a Theta, procederemos por contradicción para ojalá tener un poco más de info

Si $1 \in \Theta$, POR Ax 3, $3 \cdot 1 + 1 \overset{(ENP)}{=} 3 + 1 = 4 \in \Theta$

Si $4 \in \Theta$, como $3 \in \Theta$ POR Ax 1, $4+3=7 \in \Theta$ por Ax 3

Llegando a la contradicción con el AX1 que establece que 7 NO PERTENECE a Theta, demostrando lo pedido

P1 b ii)

Si $x \in \Theta$, por AX2, $3x+1 \in \Theta$.

Como $3 \in \Theta$ por AX1, por AX3, $[3x+1]+3 \in \Theta$

$\implies [3x+1]+3 \in \Theta$ pero $[3x+1]+3 \overset{ASOC}{=} 3x+[1+3] = 3x+4$

$\implies 3x+4 \in \Theta$ $(\star_1)$

Como $y \in \Theta$, por AX3, $y+y = 2y \in \Theta$ $(\star_2)$

luego, como $3x+4, 2y \in \Theta$ $(\star_{1,2})$, por AX3, $[3x+4]+2y \in \Theta$

pero $[3x+4]+2y \overset{ASOC}{=} 3x+[4+2y]$

$\overset{CONM}{=} 3x+[2y+4]$

$= 3x+2y+4$. concluyendo.

P1 b iv) Tal y como en (P2,b,i), solo tenemos información cuando elementos pertenecen a Theta, por lo que procederemos por contrarecíproca, es decir :

PDQ $(x \notin \Theta \vee \frac{y}{2} \notin \Theta) \implies (3x+y+4 \notin \Theta)$ lo que es: PDQ $x, \frac{y}{2} \in \Theta \implies 3x+y+4 \in \Theta$

el desarrollo queda propuesto. Hint: ver (P1,b,ii)

iii) $x, y \in \Theta \implies 4 - x - y \notin \Theta$

Nuevamententente, como solo tenemos info cuando elementos pertenecen a Theta, vamos por contradicción decir:

Supongamos que $x, y \in \Theta \wedge 4 - x - y \in \Theta$ es cierto para obtener una contradicción

NOTAR que si $x, y, 4-x-y \in \Theta$, por AX3:

$[4-x-y] + y \in \Theta$

luego, PARA ser mas claros:

$$
\begin{aligned}
[4-x-y]+y &= [(4-x)-y]+y \\
&\overset{ASOC}{=} (4-x)+[(-y)+y] \\
&\overset{COMMUT}{=} (4-x)+[y+(-y)] \\
&\overset{EIS}{=} (4-x)+[0] \\
&\overset{ENS}{=} (4-x)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow 4-x \in \Theta$.

además, si $4-x, x \in \Theta$, por AX3:

$(4-x)+x \in \Theta$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (4-x)+x &\overset{ASOC}{=} 4+((-x)+x) \\
&\overset{COMM}{=} 4+(x+(-x)) \\
&\overset{EIS}{=} 4+0 \\
&\overset{ENS}{=} 4
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow 4 \in \Theta$

Ahora, si 4 PERTENECE a Theta llegamos a una contradicción, (ver partes anteriores), por lo que hemos demostrado lo pedido

v) No existe un $x \in \Theta$ tal que $3(2x-1) = 39$

Como siempre con estos enunciados, vamos por contradicción, es decir,
Supongamos existe un x en Theta tal que 3(2x-1)=39 y esperemos llegar a una contradicción

Si ese x existeriera, el lado izquierdo quedaría:

3(2x-1) := 3(2x + (-1))
= 3(2x) + 3(-1) Distrib.
=(3*2)x + (-1)3 Asoc y conm
= 6x + (-3) P2b
= (-3) + 6x conmut

Por lo que la ecuación original quedaría

(-3) + 6x = 39

Que por defición de diferencia (pág 8 del apunte) es equivalente a :

(*) de P2.C.

6x = 39 - (-3) := 39 + (-(-3)) = 39 + 3 = 42

Lo que implica que:

6x = 42

que por defición de cociente (pág 9 del apunte) es equivalente a:

x = 42/6 = 7

Con esto, como por hipótesis x PERTENECE a Theta, y como x=7, 7 PERTENECE a Theta, por lo que llegamos a la contradicción, demostrando lo pedido.

ramo:

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

P2 [redacted] a) sea $x \in \mathbb{R}$

veamos que si $x + x \cdot 0 = x$ se tiene lo pedido pues el Neutro aditivo es único e igual a 0

$= x + x \cdot 0$

$= x \cdot 1 + x \cdot 0$ — Neutro multiplicativo

$= x(1+0)$ — distributividad

$= x \cdot 1$ — Neutro aditivo

$= x$ — Neutro multiplicativo

como se probó para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario se concluye.

P2 [redacted] b) PDQ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(-1) \cdot x = -x$, es decir; $\forall x \in \mathbb{R}$ $x + (-1) \cdot x = 0$

sea $x \in \mathbb{R}$

$= x + (-1) \cdot x$

$= x \cdot 1 + (-1) \cdot x$ — Neutro multip.

$= 1 \cdot x + (-1) \cdot x$ — conmutativ

$= (1 + (-1)) \cdot x$ — distributividad

$= 0 \cdot x$ — inverso aditivo

$= 0$ — P2, a)

concluyendo que $(-1) \cdot x = -x$ por unicidad del inv. aditivo y dado que x era arbitrario ramo fecha: / /

s: c: a:

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

P2, c) PDQ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$

Sea $x \in \mathbb{R}^*$; queremos que $-x \cdot (-(x^{-1})) = 1$ para concluir por unicidad del inverso multiplicativo y dado que x era arbitrario.

$(-x) \cdot (-(x^{-1}))$

$[(-1)(x)][(-1)(x^{-1})]$ P2, b

$\{[(-1)(x)](-1)\} \cdot x^{-1}$ Asociatividad

$\{[(x) \cdot (-1)](-1)\} \cdot x^{-1}$ conmutatividad

$\{(x)[(-1)(-1)]\} \cdot x^{-1}$ asociatividad

$\{(x)[1]\} \cdot x^{-1}$ (★)

$(x) \cdot x^{-1}$ elemento neutro

1 inverso multiplic.

(★) PDQ $(-1)(-1) = 1$

en efecto pues $(-1)(-1) = -(-1)$ por P2-b

y $-(-1) = 1$ pues

$(-1) + 1 = 1 + (-1) = 0$ por conmutatividad y el inverso aditivo.

lo anterior pues $-(-1)$ es el único real tq $(-1) + (-(-1)) = 0$ y en { } el 1 también lo hace $\Rightarrow$ $-(-1) = 1$

ramo:

P2 d)

Demuestre, utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, que:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (-1) \cdot x = -x$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

suponyamos por contradicción que, dados $x, y \in \mathbb{R}^*$ cualesquiera, $x \cdot y = 0 \;\wedge\; x \neq 0 \;\wedge\; y \neq 0$;

como $x \cdot y = 0$, $(x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} = 0$

pues $0 \cdot y^{-1} = 0$ por axioma. (y^{-1} existe pues $y \in \mathbb{R}^*$ y es único)

$$\implies (x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0$$

$$x (y \cdot y^{-1}) = 0 \quad \text{asociatividad}$$

$$x (1) = 0 \quad \text{elemento inverso}$$

$$x = 0 \quad \text{neutro multiplicativo.}$$

demostrando lo pedido

ramo: AHORA ustedes!!! fecha: / /

P2 e) e) $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, d \in \mathbb{R}^*, a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$

sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $c, d \in \mathbb{R}^*$;

suponyamos $a(b+d) = b(a+c)$

luego $ab + ad = ba + bc$

$$ad + ab = bc + ab$$

$$[ad+ab] + -(ab) = [bc+ab] + -(ab)$$

$$ad + [ab + -(ab)] = bc + [ab + -(ab)]$$

$$ad + 0 = bc + 0$$

$$ad = bc$$

$$(ad)d^{-1} = (bc)d^{-1}$$

$$a(dd^{-1}) = b(cd^{-1})$$

$$a(1) = b(cd^{-1})$$

$$a = b(cd^{-1})$$

$$\Rightarrow b^{-1}a = b^{-1}(b(cd^{-1}))$$

$$\Rightarrow ab^{-1} = (b^{-1}b)(cd^{-1})$$

$$ab^{-1} = (1)\ cd^{-1}$$

$$ab^{-1} = cd^{-1}$$

demostrando lo pedido

NOTA: Recuerda en cada paso anotar el axioma o propiedad que justifica el mismo, sino en el control habrán descuentos (acá está propuesto para que suelten la mano :))

$-(ab)$ existe y es único pues $(ab) \in \mathbb{R}$ pues $a, b \in \mathbb{R}$

d^{-1} existe y es único pues $d \in \mathbb{R}^*$

b^{-1} existe y es único pues $b \in \mathbb{R}^*$

P2 f

RECUERDA hacer las justificaciones!

PDQ: $(-(x^{-1})+1)\cdot x = x+(-1)$

en efecto

$(-(x^{-1})+1)\cdot x$ (P2 b)

$= ((-1)(x^{-1})+1)\cdot x$

$= ([(-1)(x^{-1})]x + (1)x)$

$= (-1)[(x^{-1})x] + (1)x$

$= (-1)[x(x^{-1})] + (1)x$

$= (-1)(1) + (1)x$

$= (-1)(1) + x(1)$

$= (-1) + x$

$= x+(-1)$

P2 g

$xy^{-1} = (x^{-1}y)^{-1}$

$\Longleftrightarrow$

$x^{-1}y(xy^{-1}) = 1$

en efecto pues

$(x^{-1}y)(xy^{-1})$

$[(x^{-1}y)x]y^{-1}$

$[(yx^{-1})x]y^{-1}$

$[y(x^{-1}\cdot x)]y^{-1}$

$[y(x\cdot x^{-1})]y^{-1}$

$[y(1)]y^{-1}$

$[y]y^{-1}$

$1.$

Demostrando lo pedido

ramo: fecha: / /
s: c: a:

P2 b

RECUERDE JUSTIFICAR LOS PASOS PROPUESTO PARA PRACTICAR.

PDQ $1+(-1)^{-1}=0$ $\square$

NOS GUSTARÍA que $(-1)^{-1}$ fuera igual a (-1). Pues así tendríamos que:

$\square$ $1+(-1)^{-1} = 1+(-1) = 0$ por axioma.

Pero la matraca no es tan directa

$\Rightarrow$ tratemos de hacer cosas conocidas

notar que $1=(-1)(-1)^{-1}$ (aparece el $(-1)^{-1}$ conocido)

$\Rightarrow$ desde $\square$

$$1+(-1)^{-1} = (-1)(-1)^{-1} + (-1)^{-1}$$

$\Rightarrow$ hay muchos $(-1)^{-1}$, ¡¡a distribuir!!

$$(-1)(-1)^{-1}+(-1)^{-1} = (-1)(-1)^{-1} + (-1)^{-1}\cdot 1$$
$$= (-1)(-1)^{-1} + 1\cdot(-1)^{-1}$$
$$= [(-1)+1](-1)^{-1}$$
$$= 0\,(-1)^{-1}$$
$$= (-1)^{-1}\cdot 0$$
$$= 0 \quad (\text{P2 a})$$

demostrando lo pedido

nota: si quieren usar el HowTo para esta pregunta pueden notar que es equivalente al desarrollo anterior demostrar que $(-1)^{-1}=-1$.
Hint: usar p2 b