Auxiliar 3: Geometría Analítica

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalacios J.
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

a) Sea $A = (\alpha, 0)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$, encuentre el lugar geométrico C_0 de los puntos P del plano tales que su distancia a A sea el doble de su distancia al origen. Defina como L_0 la recta que pasa por el *"polo norte"* de C_0 y el origen, y entregue la ecuación de la recta L que pasa por el *"polo norte"* de C_0 y es perpendicular a L_0.

b) Entregue la ecuación de la circunferencia C_1 cuyo radio es el mismo que el de $x^2+x+y^2 = 3y$, considerando que el *"polo sur"* de C_1 pasa por el punto (a, b).

P2. Matraca

Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita en el triangulo definido por la intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 : 2x - 3y + 21 = 0$$
$$L_2 : 3x - 2y - 6 = 0$$
$$L_3 : 2x + 3y - 9 = 0$$

Para esto:

a) Deteremine los vértices del triangulo y haga un dibujo

b) Determine las bisectrices del triangulo

c) Encuentre el centro y radio de la circunferencia y concluya.

Hint I: Una circunferencia inscrita en un triangulo tiene como centro la intersección de las bisectrices.
Hint II: Recuerde que la formula de la distacia d entre una recta $ax + by + c = 0$ y un punto (x_0, y_0) es $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

P3. De controles

Considere dos circunferencias C_1 y C_2 La primera está centrada en el origen y tiene radio 1. La segunda está centrada en $(2, 1)$ y tiene radio r. Demuestre que si $1 + r = \sqrt{5}$, entonces C_1 y C_2 tienen un único punto en común.

Resumen Auxiliar 3: Geometría Analítica
Sivert Scaff & Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo MA1001-3 Primavera 2024

Definición (Distancia entre dos puntos)

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3.1}$$

Definición (Ecuación de la circunferencia)

$$\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Definición (Ecuación general de la recta)

$$\mathcal{L} : ax + by + c = 0.$$

Definición (Pendiente de una recta) Sea $\mathcal{L}$ una recta no vertical. Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes de $\mathcal{L}$, entonces al real $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se le llama *pendiente de la recta* $\mathcal{L}$.

Teorema 3.1. *El conjunto solución de la ecuación $ax + by + c = 0$ es:*

i) El conjunto vacío si $a = 0, b = 0, c \neq 0$.

ii) Todo el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a = b = c = 0$.

iii) Una recta vertical si $a \neq 0$ y $b = 0$.

iv) Una recta horizontal si $a = 0$ y $b \neq 0$.

v) Una recta oblicua (inclinada) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Definición (Ecuación de la recta dados dos puntos)

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definición (Simetral) Dados dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ distintos, llamamos Simetral de P y Q, a la recta $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ que satisface

$$(x,y) \in \mathcal{L} \iff d(P,(x,y)) = d(Q,(x,y)).$$

Proposición 3.2. *Sean L y L' dos rectas. Entonces $L \perp L'$ si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface.*

- *L es horizontal y L' es vertical.*
- *L es vertical y L' es horizontal.*
- *L y L' son oblicuas con pendientes m_L y $m_{L'}$ respectivamente y $m_L \cdot m_{L'} = -1$.*