Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-3 - Primavera 2024 – Introducción al Cálculo

Auxiliar 5: Repaso C1

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalacios J.
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar: Axiomas de Cuerpo

a) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = 1$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

b) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $-a = -b$ entonces $a = b$

P2. Matraca: Axiomas de Orden

$(a^2 + ac + ba + bc)(b+c)$
$\parallel$

a) Demuestre que, para $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $8abc \leq (a+b)(a+c)(b+c)$

$a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) + 2abc$

b) Resuleva, para $x \in \mathbb{R}$, la inecuación $\dfrac{|x^2-9|}{x^2-5x+6} + 2 \geq 5$

¿¿ $b^2 + c^2 \geq 2bc$??
$(b-c)^2 \geq 0$ ✓✓

P3. De controles: Geometría Analítica

a) Considere el triangulo de vertices $A = (0, 0)$, $B = (2b, 0)$ y $C = (c, d)$ que vive en el primer cuadrante. Definimos como L a la recta perpendicular a AB que pasa por B. R será el punto por donde corta al eje Y la recta perpendicular a AC que pasa por M, el punto medio de AB. Por M se traza la perpendicular a BC que corta a L en un punto S. Demuestre que RS y CM son perpendiculares.

b) Caracterice completamente el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen que existe una contante estrictamente negativa, y en módulo menor a 1, tal que, para $a > 0$ fijo, el producto de las pendientes de las rectas que pasan por P y $A = (a, 0)$, y por P y $A' = (-a, 0)$, es igual a dicha constante.

P1. Para comenzar: Axiomas de Cuerpo

a) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = 1$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

b) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $-a = -b$ entonces $a = b$

b) Resuleva, para $x \in \mathbb{R}$, la inecuación $\dfrac{|x^2 - 9|}{x^2 - 5x + 6} + 2 \geq 5$

a) Demuestre que, para $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $8abc \leq (a + b)(a + c)(b + c)$

a) Considere el triangulo de vertices $A = (0, 0)$, $B = (2b, 0)$ y $C = (c, d)$ que vive en el primer cuadrante. Definimos como L a la recta perpendicular a AB que pasa por B. R será el punto por donde corta al eje Y la recta perpendicular a AC que pasa por M, el punto medio de AB. Por M se traza la perpendicular a BC que corta a L en un punto S. Demuestre que RS y CM son perpendiculares.

b) Caracterice completamente el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen que existe una contante estrictamente negativa, y en módulo menor a 1, tal que, para $a > 0$ fijo, el producto de las pendientes de las rectas que pasan por P y $A = (a, 0)$, y por P y $A' = (-a, 0)$, es igual a dicha constante.

P1. Para comenzar: Axiomas de Cuerpo

a) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = 1$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

b) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $-a = -b$ entonces $a = b$

a) $a, b \in \mathbb{R}$,

PDQ $a + b = 1 \implies (ab)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

sean $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a+b=1$

PDQ $\underline{(ab)^{-1}} = \underline{a^{-1} + b^{-1}}$

por Ax de elem inverso, $(ab)^{-1}$ es el único real tq $(ab)(ab)^{-1} = 1$.

PDQ $(ab)(a^{-1} + b^{-1}) = 1$

$(ab)(a^{-1} + b^{-1})$

$= (ab)a^{-1} + (ab)b^{-1}$ DISTRIBUT

$= (ba)a^{-1} + (ab)b^{-1}$ CONMUTATIV.

$= b(aa^{-1}) + a(bb^{-1})$ ASOCI

$= b(1) + a(1)$ AX inv del prod.

$= b + a$ elem neutro prod

$= a + b = 1$ CONMUTATIVIDAD.

b) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $-a = -b$ entonces $a = b$

$a \in \mathbb{R}$

$-a$ es el inverso aditivo de a.

$a + (-a) = 0$

$\iff$

$a + (-b) = 0$ ⊛

PDQ $a = b$

en efecto $b = b + 0$ neutro suma

$= b + [a + (-b)]$ ⊛

$= b + [(-b) + a]$ conmut

$= [b + (-b)] + a$ asociat

$= 0 + a$ inverso aditi

$= a + 0 = a$ conmut, neutro suma

P3 b)

b) Caracterice completamente el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen que existe una contante estrictamente negativa, y en módulo menor a 1, tal que, para $a > 0$ fijo, el producto de las pendientes de las rectas que pasan por P y $A = (a, 0)$, y por P y $A' = (-a, 0)$, es igual a dicha constante.

Sea $P = (x,y)$ $\qquad m_{PA} \cdot m_{PA'} = \underline{-c}$, $\underline{c > 0}$, $|c| < 1$

$$\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} \cdot \frac{y_P - y_{A'}}{x_P - x_{A'}} = -c$$

$$\frac{y - 0}{x - a} \cdot \frac{y - 0}{x + a} = -c$$

$$\frac{y}{(x-a)} \cdot \frac{y}{(x+a)} = -c$$

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = -c$$

$$y^2 = -c(x^2 - a^2)$$

$$y^2 = -cx^2 + ca^2$$

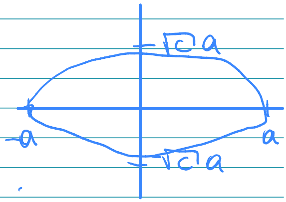
$$y^2 + cx^2 = ca^2 \qquad / \cdot \frac{1}{ca^2}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{ca^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1}$$

recordar que $|c| < 1$, $c > 0$

Elipse, centrada en $(0,0)$

$$\left(\frac{(x-0)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-0}{\sqrt{c}\,a}\right)^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{c}\,a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$$



$$\sqrt{c}\,a < a$$

RESUMEN $\quad a>b$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Elipse centrada en (x_0, y_0)
horizontal

SE MAYOR $= a$
" " menor $= b$

b) Resuleva, para $x \in \mathbb{R}$, la inecuación $\dfrac{|x^2-9|}{x^2-5x+6}+2 \geq 5$

$$\frac{|x^2-9|}{x^2-5x+6} \geq 3 \qquad -2 \,|\, 3$$

$$\frac{|(x-3)(x+3)|}{(x-3)(x-2)} \geq 3$$

OJO

$$\boxed{x \neq 2, 3}$$

$$\frac{|\cancel{x-3}|\,|x+3|}{(\cancel{x-3})\,(x-2)} \geq 3$$

$$\frac{|y|}{y} = sgn(y) \begin{cases} 1 & si\ y>0 \\ -1 & si\ y<0 \end{cases}$$

si $y>0$, $|y| = y$, $\frac{|y|}{y} = \frac{y}{y} = 1$

si $y<0$, $|y| = -y$, $\frac{|y|}{y} = \frac{-y}{y} = -1$

$$sgn(x-3)\,\frac{|x+3|}{x-2} \geq 3$$

CASO 1. $x+3 \geq 0$ $\quad$ $|\ |$ positivo

$x \geq -3$

$$\Rightarrow sgn(x-3)\,\frac{(x+3)}{x-2} \geq 3$$

CASO 1.1. $x-3>0$ $\qquad (x \geq -3)$

$(sgn()=1)$ $\quad x>3$ $\qquad (x>3)$

$$\Rightarrow 1 \cdot \frac{(x+3)}{x-2} \geq 3$$

CASO 1.1.1, $x-2>0$

$x>2$

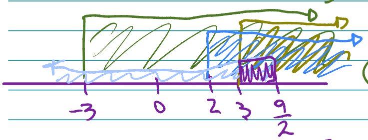
$x \geq -3$

$x > 3$

$x > 2$

$x \leq \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)}{x-2} \geq 3$$



$(x+3) \geq 3(x-2)$

$x+3 \geq 3x-6$

$9 \geq 2x$

$\frac{9}{2} \geq x.$

$x \in \left(3, \frac{9}{2}\right]$

solucioua

$x \in (3, \frac{9}{2}]$ soluciona

CASO 1.1.2

$x - 2 < 0$

$x < 2$

$\boxed{\begin{array}{l} (x \geq -3) \\ (x \geq 3) \\ (x < 2) \end{array}}$ CASO 1 / CASO 1.1

$2 > x \geq 3$

$2 > 3$ ✗

en el CASO 1.1.2 NO HAY solución

CASO 1.2

$(x \geq -3)$ CASO 1

$\text{sign}(x-3) = -1$

$x - 3 < 0$

$x < 3$

$$\Rightarrow \frac{\text{sign}(x-3)(x+3)}{x-2} \geq 3$$

$$\frac{-(x+3)}{x-2} \geq 3$$

CASO 1.2.1

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$x \geq -3$ CASO 1

$x < 3$ CASO 1.2

$x > 2$

$$\frac{-(x+3)}{x-2} \geq 3$$

$$-x - 3 \geq 3(x-2)$$

$$-x - 3 \geq 3x - 6$$

$$3 \geq 4x$$

$$\frac{3}{4} \geq x$$

$x \geq -3$

$x < 3$

$x > 2$

$x \leq 3/4$

$$2 < x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 2 < \frac{3}{4} \text{ ✗}$$

en 1.2.1 NO HAY solución

CASO 1.2.2

$x-2<0$

$x<2$

$x \geq -3$ CASO 1

$x < 3$ CASO 1.2

$x < 2$

$$\operatorname{sgn}(x-3)\,\frac{(x+3)}{x-2} \geq 3$$

$$-1\,\frac{(x+3)}{x-2} \geq 3$$

$x-2<0$

$$-(x+3) \leq 3(x-2)$$

$$-x-3 \leq 3x-6$$

$$3 \leq 4x$$

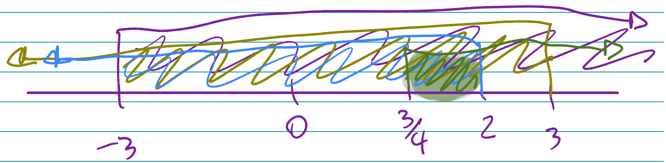
$$\frac{3}{4} \leq x$$

$x \geq -3$

$x < 3$

$x < 2$

$x \geq \frac{3}{4}$



$x \in \left[\frac{3}{4}, 2\right)$ soluciona

CASO 2 $\quad x+3<0$

$x<-3$

$$\Rightarrow \quad \text{sgn}(x-3)\,\frac{|x+3|}{x-2} \geq 3$$

$$= \text{sgn}(x-3)\,\frac{[-(x+3)]}{x-2} \geq 3$$

CASO 2.1 $\quad \text{sgn}(x-3)=1$

$x-3>0$

$x>3$

$x<-3$ CASO 2

$x>3$ CASO 2.1

$3<x<-3$

$3<-3$ ✗

No hay solución en 2.1

CASO 2.2 $\quad \text{sgn}(x-3)=-1$

$x-3<0$

$x<3$

$$\Rightarrow \quad \text{sgn}(x-3)\,\frac{[-(x+3)]}{x-2} \geq 3$$

$$-1\,\frac{[-(x+3)]}{x-2} \geq 3$$

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 3$$

CASO 2.2.1

$x-2>0$

$x>2$

$(x<-3)$ CASO 2.2

$(x<3)$

$(x>2)$

$2<x<-3$

$2<-3$ ✗ NO HAY solución

CASO 2.2.2

$\boxed{x-2<0}$

$x<2$

$(x<-3)$
$(x<3)$ CASO 2.2

$$\frac{\operatorname{syn}(x-3)\left[-(x+3)\right]}{x-2} \geq 3$$

$$\frac{-1\left[-(x+3)\right]}{x-2} \geq 3$$

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 3$$

$\boxed{x-2<0}$

$x+3 \leq 3(x-2)$

$x+3 \leq 3x-6$

$9 \leq 2x$

$\frac{9}{2} \leq x$

$x \leq -3$
$x < 3$
$x < 2$
$x \geq \frac{9}{2} = 4{,}5$

$4{,}5 \leq x < 2$

$4{,}5 < 2$?? NO

La solución final esta dada por $\left[\frac{3}{4}, 2\right) \cup \left(3, \frac{9}{2}\right]$

esto tiene sentido pues $x \neq 2, 3$.

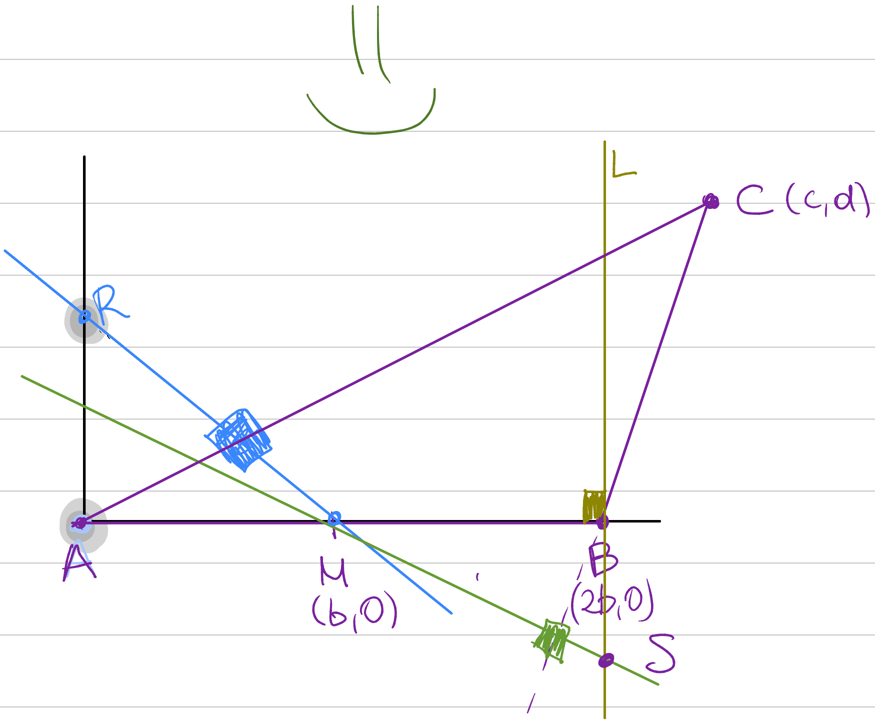
$$-2 \leq 8$$

$$\parallel$$

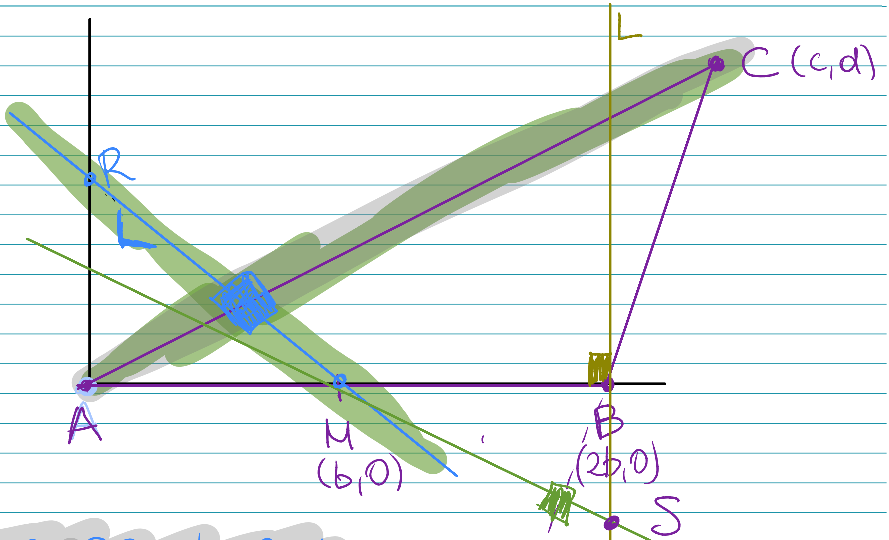
$$\boxed{\frac{2}{-1} \leq 8}$$

$$2 \geq -8$$

Date: /



a) Considere el triangulo de vertices $A = (0, 0)$, $B = (2b, 0)$ y $C = (c, d)$ que vive en el primer cuadrante. Definimos como L a la recta perpendicular a AB que pasa por B. R será el punto por donde corta al eje Y la recta perpendicular a AC que pasa por M, el punto medio de AB. Por M se traza la perpendicular a BC que corta a L en un punto S. Demuestre que RS y CM son perpendiculares.



PDQ $RS \perp CM$ ✓✓

$\boxed{R}$ $RM \perp AC$

$$m_{RM} \cdot m_{AC} = -1$$

$$m_{RM} \cdot \left[\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}\right] = -1$$

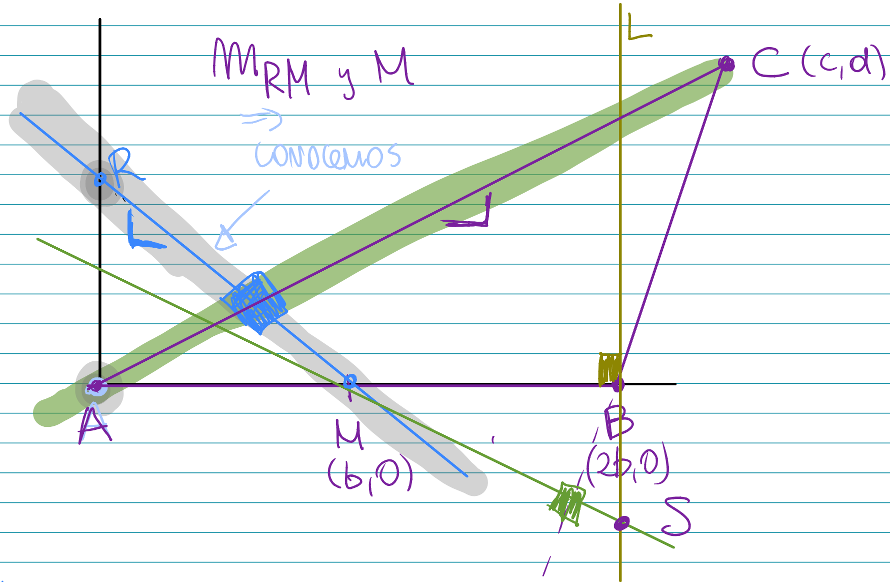
$$m_{RM} \cdot \left[\frac{d - 0}{c - 0}\right] = -1$$

$$m_{RM} \, \frac{d}{c} = -1$$

$$m_{RM} = -\frac{c}{d}.$$

L_{RM} $\quad y - y_M = m_{RM}(x - x_M)$

$$y - 0 = m_{RM}(x - b)$$



$$L_{RM} \quad y = m_{RM}(x-b)$$

$$y = -\frac{c}{d}(x-b)$$

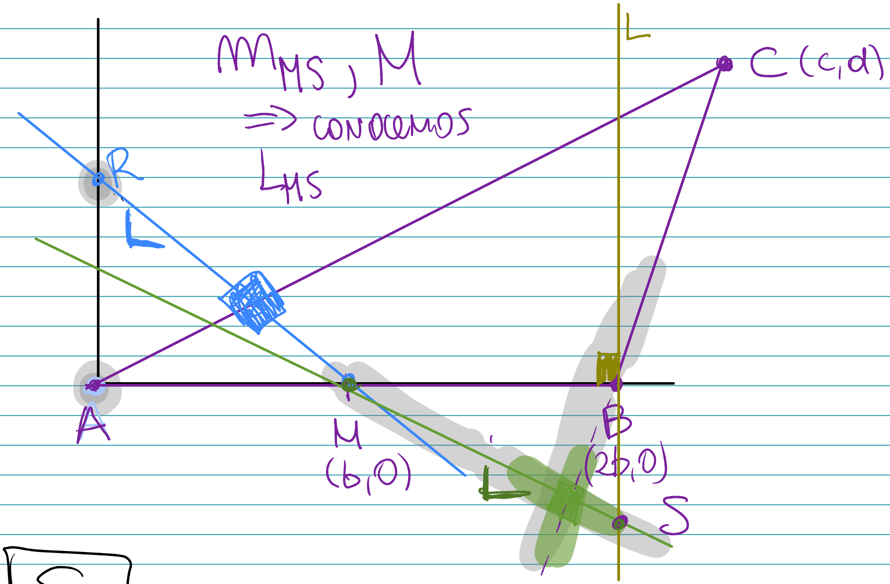
$$\boxed{L_{RM}: \quad y = -\frac{cx}{d} + \frac{cb}{d}}$$

$$R = (0, L_{RM}(0))$$

$$= \left(0, 0 + \frac{cb}{d}\right)$$

$$\Rightarrow R = \left(0, \frac{cb}{d}\right).$$

m_{MS}, M $\Rightarrow$ conocemos L_{MS}



$\boxed{S}$

$$m_{SM} \cdot m_{BC} = -1$$

$$m_{SM} \cdot \left[\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}\right] = -1$$

$$m_{SM} \left[\frac{0-d}{2b-c}\right] = -1$$

$$m_{SM} \left[\frac{-d}{2b-c}\right] = -1$$

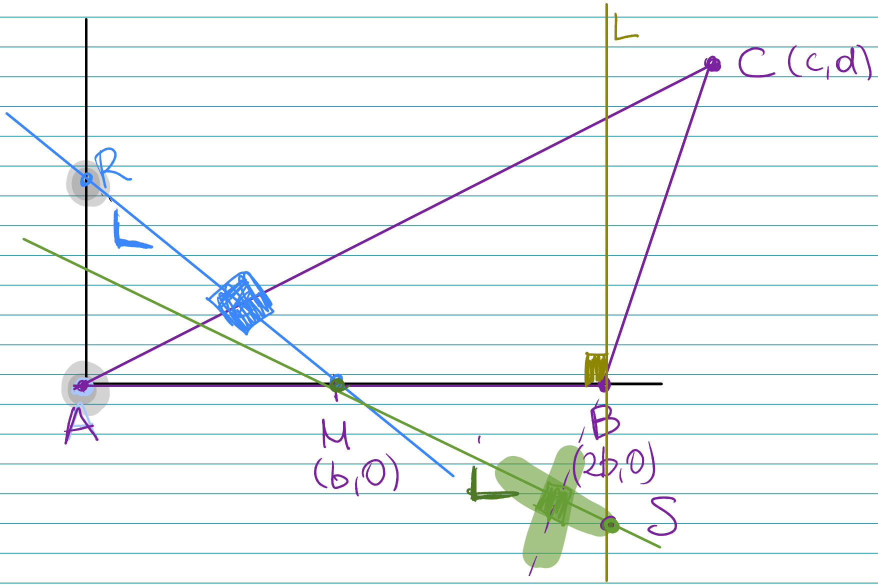
$$m_{SM} = \frac{2b-c}{d}$$

Calculemos L_{MS}

$$L_{MS}: \quad y - y_M = m_{MS}(x - x_M)$$

$$y - 0 = \left(\frac{2b-c}{d}\right)(x-b)$$

$$y = \frac{(2b-c)x}{d} - \frac{2b^2 - bc}{d}$$



$$L_{MS}: \quad y = \left(\frac{2b-c}{d}\right)x - \frac{2b^2-cb}{d}$$

$$\Rightarrow \quad S = (2b, L_{MS}(2b))$$

$$= \left(2b, \frac{(2b-c)\,2b}{d} - \frac{2b^2 - cb}{d}\right)$$

$$= \left(2b, \frac{4b^2 - 2cb - 2b^2 + cb}{d}\right)$$

$$S = \left(2b, \frac{2b^2 - cb}{d}\right)$$

tenemos S y R

y queremos demostrar que

$$RS \perp CM$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$m_{RS} \cdot m_{CM} = -1$$

$\Longrightarrow$

calculemos $m_{RS}\, m_{CM}$

como

$$S = \left(2b, \frac{2b^2 - cb}{d}\right)$$

$$R = \left(0, \frac{cb}{d}\right).$$

$m_{RS}\, m_{CM}$

$$\left[\frac{y_R - y_S}{x_R - x_S}\right]\left[\frac{y_C - y_M}{x_C - x_M}\right]$$

$$\left[\frac{\frac{cb}{d} - \frac{2b^2 - cb}{d}}{0 - 2b}\right]\left[\frac{d - 0}{c - b}\right]$$

$$\left[\frac{\frac{cb - 2b^2 + cb}{d}}{\frac{-2b}{1}}\right]\left[\frac{d}{c-b}\right] = \left[\frac{\frac{2cb - 2b^2}{d}}{\frac{-2b}{1}}\right]\left[\frac{d}{c-b}\right]$$

$$m_{RS}\, m_{CM}$$

$$\left[\frac{y_R - y_S}{x_R - x_S}\right]\left[\frac{y_C - y_M}{x_C - x_M}\right]$$

$$\left[\frac{\frac{cb}{d} - \frac{2b^2 - cb}{d}}{0 - 2b}\right]\left[\frac{d - 0}{c - b}\right]$$

$$\left[\frac{\frac{cb - 2b^2 + cb}{d}}{\frac{-2b}{1}}\right]\left[\frac{d}{c-b}\right] = \left[\frac{\frac{2cb - 2b^2}{d}}{\frac{-2b}{1}}\right]\left[\frac{d}{c-b}\right]$$

$$= \left[-\frac{2cb - 2b^2}{d(2b)}\right]\left[\frac{d}{c-b}\right]$$

$$\left[-\frac{\cancel{2b}\,(c-b)}{d(\cancel{2b})}\right]\left[\frac{d}{c-b}\right]$$

$$\left[-\frac{(c-b)}{d}\right]\left[\frac{d}{c-b}\right] = -1$$

demostrando lo pedido.

a) Demuestre que, para $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $8abc \leq (a+b)(a+c)(b+c)$

$(a+b)(a+c)(b+c)$

$[(a+b)a+(a+b)c](b+c)$ Distribut

$[aa+ba+ac+bc](b+c)$ Distrib x2

$[aa+(ba+ac+bc)](b+c)$ Dist

$[aa+(ba+ac+bc)]b+[aa+(ba+ac+bc)]c$

$aab+(ba+ac+bc)b+aac+(ba+ac+bc)c$

$aab+(ba+(ac+bc))b+aac+(ba+(ac+bc))c$

$aab+bab+(ac+bc)b+aac+bac+(ac+bc)c$

$aab+bab+acb+bcb+aac+bac+acc+bcc$

conmutatividad (con x2)

$aab+bba+abc+bbc+aac+abc+cca+ccb$

$xx := x^2$

$a^2b+b^2a+abc+b^2c+a^2c+abc+c^2a+c^2b$

conmutatividad muchas veces.

$x+x := 2x$

$ac^2+ab^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+2abc$

Distribuir

$a(c^2+b^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)+2abc$

$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$

$\Rightarrow$

$(x-y)^2 \geq 0$

$x^2-2xy+b^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$

$$a(c^2+b^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2) + 2abc$$

como $x^2+y^2 \geq 2xy$

$$\geq a2cb + b2ac + c2ab + 2abc$$

conmutar muchas veces

$$2abc + 2abc + 2abc + 2abc$$

$$:= 8abc$$

$$\therefore \quad (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc.$$