



Auxiliar 7: Funciones y Trigonometría

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalcios J.
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar: Funciones

- a) Determine, según corresponda, asíntotas verticales, horizontales y dominio de la siguientes funciones:

i) $\varphi(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}$

ii) $\xi(x) = \frac{6x^2 + 18x - 60}{x^2 - 6x + 8}$

b) Considere $f(x) = \frac{|x|}{1 - |x|}$

- Determine dominio, ceros, signos y paridad de f
- Determine intervalos de crecimiento, decrecimiento y conjunto imagen de f
- Determine asíntotas verticales y horizontales de f , según corresponda
- Demuestre que en los intervalos $(1, \infty)$ y $(-\infty, -1)$, f es inyectiva
- Bosqueje el gráfico de f

P2. Matraca: Trigonometría

Demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$, además analícelo gráficamente

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, además analícelo gráficamente

c) $\cot(x) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\sin^4(x) + 4\cos^2(x) = (1 + \cos^2(x))^2$

e) $\cos^2(y) - \sin^2(x) = \cos(x - y)\cos(x + y)$

f) $\cos(x + y) = 0 \implies \sin(x + 2y) = \sin(x)$

Resumen Auxiliar 7
Funciones y Trigonometría
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Sivert Scaff G. & Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (CEROS DE UNA FUNCIÓN) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos *ceros de f* a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta al eje OX .

DEFINICIÓN (CONJUNTO IMAGEN) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos conjunto Imagen de f al conjunto definido por

$$\text{Im}(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in A) \text{ de modo que } y = f(x)\}.$$

O sea

$$\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

DEFINICIÓN (FUNCIÓN PAR) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función par* ssi

- $(\forall x \in A) -x \in A$.
- $(\forall x \in A) f(-x) = f(x)$.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN IMPAR) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función impar* ssi

- $(\forall x \in A) -x \in A$.
- $(\forall x \in A) f(-x) = -f(x)$.

DEFINICIÓN (ASÍNTOTAS VERTICALES) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Si x_1, x_2, \dots, x_r son todas las raíces del Denominador, es decir de la función $Q(x)$ pero no del Numerador, o sea de la función $P(x)$, entonces las rectas $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_r$ se llaman **Asíntotas verticales** de la función $f(x)$ y se caracterizan por que para valores de x cercanos a dichos puntos la función crece o decrece sin cotas.

DEFINICIÓN (ASÍNTOTA HORIZONTAL) Sea

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Si $n = m$ la recta $y = \frac{a_n}{b_n}$ se llama **asíntota horizontal** de la función f y se caracteriza por que para valores de x muy grandes o muy negativos los valores de $f(x)$ se aproximan a dicha recta.
 Si $n < m$ la asíntota horizontal es $y = 0$.

- Diremos que f es **inyectiva** ssi $[f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2]$, o equivalentemente $[x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)]$
- Diremos que f es **epiyectiva** ssi $\text{Im}(f) = \text{Cod}(f)$

DEFINICIÓN (FUNCIÓN INVERSA) Sea $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Cod}(f)$ una función biyectiva. se define la función inversa de f como la función f^{-1} definida por:

$$f^{-1} : \text{Cod}(f) \rightarrow \text{Dom}(f) \text{ tal que } [y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)].$$

Resumen Auxiliar 7
Funciones y Trigonometría
Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024
Sivert Scaff G. & Ignacio Dagach Abugattas

Observación: Una biyección entre ángulos y reales (no es la única). Dado $x \in \mathbb{R}$, sea P_x el punto de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y de radio 1, que se obtiene al girar un ángulo cuya medida en radianes es x , partiendo desde el punto $(1, 0)$. Entonces si $x > 0$ estaremos rotando en el sentido contrario a los punteros del reloj y si $x < 0$ lo estaremos haciendo en el sentido de los punteros del reloj. Usando P_x definiremos las funciones trigonométricas.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN COSENO) Definimos la función **coseno** ($\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) como aquella que a cada x le asocia la abscisa del punto P_x .

DEFINICIÓN (FUNCIÓN SENO) La función **seno** ($\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) queda definida como aquella que a cada x asocia la ordenada del punto P_x .

De la definición de las funciones seno y coseno se deduce que ellas satisfacen la así llamada Identidad Trigonométrica Fundamental:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1.$$

<p>Seno: $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Le asocia a cada x la ordenada del punto P_x Período: 2π Paridad: impar $\text{sen}^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ Crece en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y decrece en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$</p>	<p>Coseno: $\text{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Le asocia a cada x la abscisa del punto P_x Período: 2π Paridad: par $\text{cos}^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ Positiva en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y es negativa en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ Decrecer en $[0, \pi]$</p>	<p>Tangente: $\text{tan} : A \rightarrow \mathbb{R}$ donde $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$ Le asocia a x $\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ Período: π Paridad: impar Sus ceros son los de la función sen Es positiva en $(0, \frac{\pi}{2})$ Es estrictamente creciente en cada intervalo de la forma $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$</p>
--	---	--

$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha)\text{cos}(\beta) \pm \text{cos}(\alpha)\text{sen}(\beta)$ **Teorema 6.1.** *En un triángulo rectángulo se satisface que*

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta) \mp \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) \qquad \text{cos}(\alpha) = \frac{b}{c}, \text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} \text{ y } \text{tan}(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\text{cos}(x)$ 2. $\text{cos}(2x) = \text{cos}^2(x) - \text{sen}^2(x)$ 3. $\text{sen}(x) \pm \text{sen}(y) = 2\text{sen}(\frac{x \pm y}{2})\text{cos}(\frac{x \mp y}{2})$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\text{sen}(\pi \pm \alpha) = \mp \text{sen}(\alpha)$ • $\text{cos}(\pi \pm \alpha) = -\text{cos}(\alpha)$ • $\text{cos}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \text{sen}(\alpha)$ • $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \text{cos}(\alpha)$ |
|---|---|

Observación: En el caso de funciones reales de variable real existen varias de ellas que no son inyectivas o no son epiyectivas y por lo tanto no tienen inversa. sin embargo, se puede construir una función inversa por el siguiente método.

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera no invertible.
- Se determina $B \subseteq A$ tal que $f|_B$ sea inyectiva.
 - De igual modo se restringe el codominio \mathbb{R} a $\text{Im}(f|_B)$. Con esto $f|_B$ se hace biyectiva y luego invertible.