Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-3 - Primavera 2024 – Introducción al Cálculo

Auxiliar 9: Trigonometría III

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalacios J.
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

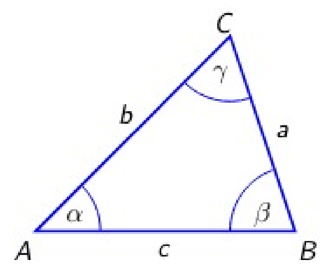
Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $4\sin(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2}) = 3$

b) $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$

c) $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

d) $(1 - \tan(x))(\sin(2x) + 1) = 1 + \tan(x)$



P2. Matraca

Considere el triángulo T visto en $P1$ de área A y demuestre que:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos(\gamma) + 2ac\cos(\beta) + 2bc\cos(\alpha)$

b) Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \frac{1}{2}Kabc$

P3. De controles

Considere el triángulo T visto en $P1$ y demuestre que:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} - \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} + \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}$$

y utilícelo para concluir que:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$cos^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$sen^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

- **[Funciones recíprocas]**: Se definen

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$$
$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$
$$csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

- **[Propiedad]**: $\boxed{sen^2(x) + cos^2(x) = 1}$
  - Si $cos(x) \neq 0$, entonces $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$ ✓
  - Si $sen(x) \neq 0$, entonces $cot^2(x) + 1 = cotan^2(x)$ ✓

- **[Propiedad suma y diferencia de ángulos]**

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) \pm cos(\alpha)sen(\beta)$$

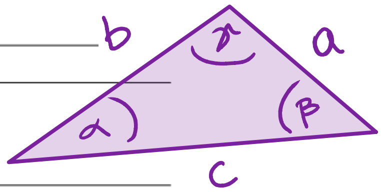
$$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$$

- **[Regla de los cuadrantes]**:
  - $sen(\pi \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$
  - $cos(\pi \pm \alpha) = -cos(\alpha)$
  - $cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$
  - $sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) = cos(\alpha)$

- **[Algunas identidades útiles]**:
  1. $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$
  2. $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x).$
  3. $sen(x) \pm sen(y) = 2sen(\frac{x \pm y}{2})cos(\frac{x \mp y}{2})$

Teorema 7.1 (Teorema del Seno).

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = k$$



Teorema 7.2 (Teorema del Coseno).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Definición (Arcocoseno) Llamamos arcocoseno a la función inversa de $f(x) = \cos x$, o sea:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \quad \text{Si } x \in [-1,1]$$

tal que

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

Definición (Arcoseno) Llamamos arcoseno a la función inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$, es decir:

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

tal que

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \iff x = \operatorname{sen} y$$

Definición (Arcotangente) Llamamos arcotangente a la función inversa de f, o sea:

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

tal que

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

Consideremos la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \arcsin a$.
Sin embargo como la función sen no es epiyectiva, esta solución no es única.
La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = k\pi + (-1)^k\alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de sen.

$\operatorname{sen} x = a$, $a \in [-1, 1]$
$x = k\pi + (-1)^k \operatorname{arcsen}(a)$, $k \in \mathbb{Z}$

Consideremos la ecuación $\cos x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \arccos a$.

Sin embargo como la función cos no es epiyectiva, esta solución no es única.
La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$
$$2k\pi \pm \operatorname{Arccos}(a), \; k \in \mathbb{Z}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de cos.

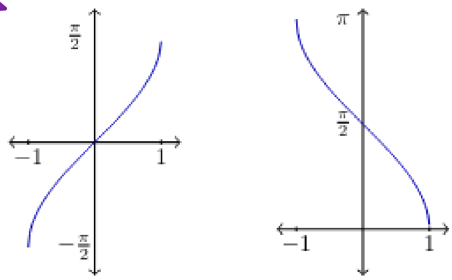
Consideremos la ecuación $\tan x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$,que corresponde a $\alpha = \arctan a$.

Sin embargo como la función tan no es epiyectiva, esta no es la única solución.

La solución general suele escribirse en la ecuación

$$x = k\pi + \alpha \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$



Gráficos de arcoseno y arcocoseno.

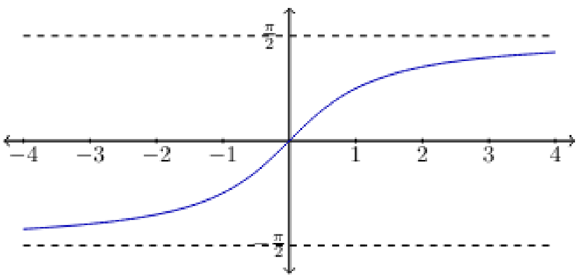


Gráfico de arcotangente.

a) $4\sin(\frac{x}{4}) + 2\cos(\frac{x}{2}) = 3$

C.V. $y = x/4$

$$4\,\text{sen}(y) + 2\cos(2y) = 3$$

$$4\,\text{sen}(y) + 2(1 - 2\,\text{sen}^2(y)) = 3$$

$$4\,\text{sen}(y) + 2 - 4\,\text{sen}^2(y) = 3$$

$$\Rightarrow \quad 4\,\text{sen}^2(y) - 4\,\text{sen}(y) + 3 - 2 = 0$$

$$4\,\text{sen}^2(y) - \underline{4\,\text{sen}(y)} + 1 = 0$$

$$(\square + \Delta)^2 = 0$$

$$\Delta^2 = 1 \Rightarrow \Delta = \pm 1$$

$$2\square\Delta \Rightarrow -4\,\text{sen}(y) = 2\square\Delta$$

$$-2\,\text{sen}(y) = \square\Delta$$

$$-2\,\text{sen}(y) = \square(-1)$$

$$2\,\text{sen}(y) = \square$$

$\Rightarrow$ si $\Delta = -1$, $\square = 2\,\text{sen}(y)$

$$(2\,\text{sen}(y) - 1)^2$$

$$4\,\text{sen}^2(y) + 2 \cdot 2\,\text{sen}(y)(-1) + (-1)^2$$

$$4\,\text{sen}^2(y) - 4\,\text{sen}(y) + 1.$$

$$(2\,\text{sen}(y) - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\text{sen}(y) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\text{sen}(y) = 1$$

$$\text{sen}(y) = 1/2$$

como $\left|\frac{1}{2}\right| \leq 1$,

$$\Rightarrow \quad y = (-1)^k \,\text{Arcsen}\left(\tfrac{1}{2}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{4} = y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \left(\frac{x}{4} = y\right)$$

$$x = (-1)^k \pi \frac{2}{3} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin(2x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$

$$2\,\text{sen}(x)\cos(x)\cos(x) = 6\sin^3(x)$$

$$2\,\text{sen}(x)\cos^2(x) = 6\sin^3(x)$$

$$2\,\text{sen}(x)\cos^2(x) - 6\sin^3(x) = 0$$

$$2\,\text{sen}(x)\left[\cos^2(x) - 3\sin^2(x)\right] = 0$$

$$2\,\text{sen}(x)\left[1 - \text{sen}^2(x) - 3\,\text{sen}^2(x)\right] = 0$$

$$2\,\text{sen}(x)\left[1 - 4\,\text{sen}^2(x)\right] = 0$$

$$\cancel{2 = 0} \quad \vee \quad \text{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad 1 - 4\,\text{sen}^2(x) = 0$$

$$\text{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad 1 = 4\,\text{sen}^2(x)$$

$$\text{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{4} = \text{sen}^2(x)$$

$$\text{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad \text{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \text{sen}(x) = \frac{-1}{2}$$

$$\text{ARCsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$-\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}(-x) = \frac{1}{2}$$

$$-x = y$$

$$\text{sen}(y) = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underset{\mathrm{I}}{\text{sen}(x) = 0} \quad \vee \quad \underset{\mathrm{II}}{\text{sen}(x) = \frac{1}{2}} \quad \vee \quad \underset{\mathrm{III}}{\text{sen}(y) = \frac{1}{2}}$$

I) $x = (-1)^k \underbrace{\cancel{\text{Arcsen}(0)}}_{0} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$= k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{sen}(x)=0} \quad \vee \quad \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{sen}(x)=\frac{1}{2}} \quad \vee \quad \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{sen}(y)=\frac{1}{2}}$$

I) $x = (-1)^k \mathrm{Arc}\underbrace{\cancel{\mathrm{sen}(0)}}_{0} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$= k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\vee$

II) $x = (-1)^k \mathrm{Arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$= (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\vee$

III) $y = (-1)^k \mathrm{Arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$-x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$x = -(-1)^k \frac{\pi}{6} - k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}$

$$\cos(\square)\sin(x) + \sin(\square)\cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x)\cos(\square) + \sin(\square)\cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x + \square) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = x + \square$$

$$\sin(\Delta) = \frac{1}{2}$$

$\square = \frac{\pi}{6}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y = x + \frac{\pi}{6}$$

$$\mathrm{sen}(y) = 1/2$$

$$y = (-1)^k \operatorname{Arcsen}(1/2) + k\pi \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\pi}{6} \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d) $(1 - \tan(x))(\sin(2x) + 1) = 1 + \tan(x)$

$$\text{sen}(2x) + 1 - \text{tg}(x)\,\text{sen}(2x) - \text{tg}(x) = 1 + \text{tg}(x)$$

$$\text{sen}(2x) + 1 - \text{tg}(x)\,\text{sen}(2x) - \text{tg}(x) - 1 - \text{tg}(x) = 0$$

$$\text{sen}(2x) - \text{tg}(x)\,\text{sen}(2x) - 2\,\text{tg}(x) = 0$$

$$2\,\text{sen}(x)\cos(x) - 2\,\text{tg}(x)\,\text{sen}(x)\cos(x) - 2\,\text{tg}(x) = 0$$

$$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$2\,\text{sen}(x)\cos(x) - 2\,\frac{\text{sen}(x)}{\cancel{\cos(x)}}\,\text{sen}(x)\cancel{\cos(x)} - 2\,\text{tg}(x) = 0$$

$$2\,\text{sen}(x)\cos(x) - 2\,\text{sen}^2(x) - 2\,\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = 0$$

$$\frac{2}{\cos(x)}\left[\text{sen}(x)\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)\cos(x) - \text{sen}(x)\right] = 0$$

$$\frac{2}{\cos(x)}\left[\text{sen}(x)\left(1 - \text{sen}^2(x)\right) - \text{sen}^2(x)\cos(x) - \text{sen}(x)\right] = 0$$

$$\frac{2}{\cos(x)}\left[\cancel{\text{sen}(x)} - \text{sen}^3(x) - \text{sen}^2(x)\cos(x) - \cancel{\text{sen}(x)}\right] = 0$$

$$\frac{2}{\cos(x)}\left[-\text{sen}^3(x) - \text{sen}^2(x)\cos(x)\right] = 0$$

$$\frac{-2}{\cos(x)} \cdot \text{sen}^2(x)\left[\text{sen}(x) + \cos(x)\right] = 0$$

$\cancel{\frac{-2}{\cos(x)} = 0} \quad \vee \quad \operatorname{sen}^2(x) = 0 \quad \vee \quad [\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] = 0$

COMO $\cos(x) \neq 0$

$\operatorname{sen}^2(x) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(x) = -\cos(x)$

$\operatorname{sen}^2(x) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{tg}(x) = -1$

$\Leftrightarrow$

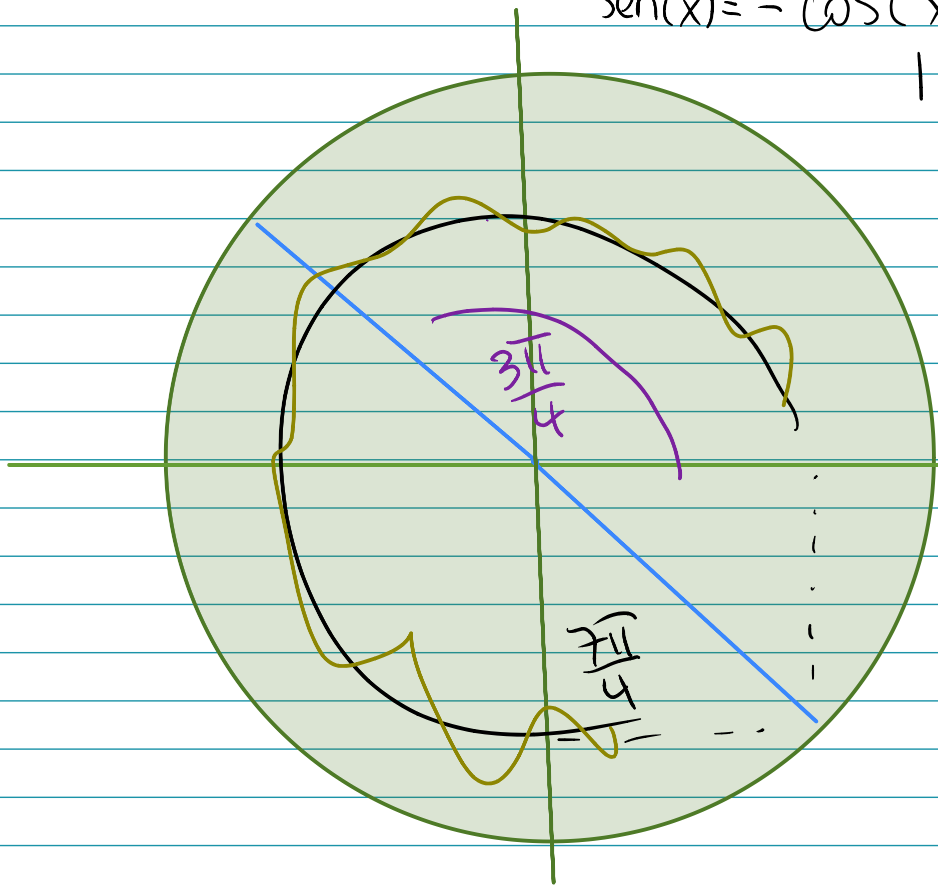
$\operatorname{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{tg}(x) = -1$

$x = (-1)^k \operatorname{Arcsen}(\cancel{0}) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ (0)

$x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \operatorname{tg}(x) = -1$

$\operatorname{sen}(x) = -\cos(x)$

$|\operatorname{sen}(x)| = |\cos(x)|$



$|\operatorname{tg}(x)| = 1$

$\cancel{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{+}{+} = +}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{+}{-} = -$

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-}{-} = +$

$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{-}{+} = -$

$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \vee \\ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

la solución es

$x = k\pi$ $\vee$ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\vee$ $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

P2. Matraca

Considere el triángulo T visto en $P1$ de área A y demuestre que:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos(\gamma) + 2ac\cos(\beta) + 2bc\cos(\alpha)$

b) Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \frac{1}{2}Kabc$

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$(2) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$(3) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

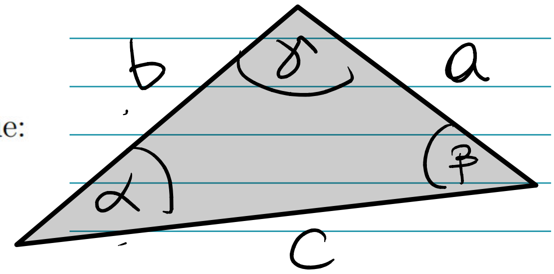
$(1)+(2)+(3)$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc\cos\alpha - 2ab\cos\gamma - 2ac\cos\beta$$

$$2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta = a^2 + b^2 + c^2$$

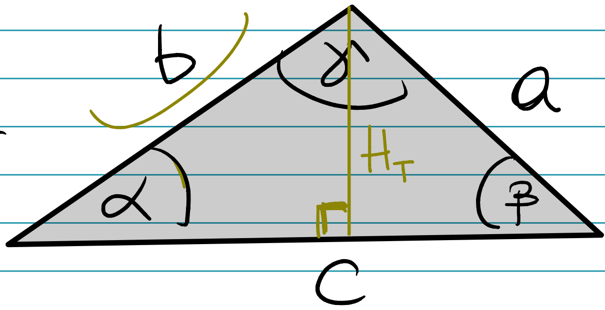
P2. Matraca



Considere el triángulo T visto en $P1$ de área A y demuestre que:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos(\gamma) + 2ac\cos(\beta) + 2bc\cos(\alpha)$

b) Existe una constante $K \in \mathbb{R}$ que cumple que $A = \frac{1}{2}Kabc$

$T =$ 

$$A = \frac{1}{2} B_T H_T \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{H_T}{b}$$

$$= \frac{1}{2} c\, b \operatorname{sen}\alpha \qquad b \operatorname{sen}\alpha = H_T$$

$\vdots$

$$= \frac{1}{2} k\, a b c$$

OJALÁ $\exists k$ tq $\operatorname{sen}\alpha = ka$

POR teorema del seno,

$\exists\, k \in \mathbb{R}$ tq $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = k$

$\Rightarrow$

$\operatorname{sen}\alpha = a \cdot k$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$ (k del teo del seno) tq $\operatorname{sen}\alpha = ak$.

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} c b \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} c b a k$$

$$= \frac{1}{2} k a b c$$

P3. De controles

Considere el triángulo T visto en $P1$ y demuestre que:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} - \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} + \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$$

Como $b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta$,

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

Análogamente $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\,\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - \operatorname{sen}\beta\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\operatorname{sen}\alpha\,\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \operatorname{sen}\beta\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$\|$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} - \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} + \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}$$

Considere el triángulo T visto en $P1$ y demuestre que:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} - \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} + \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}$$

y utilícelo para concluir que:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$$\frac{\cancel{\frac{\sin(\alpha)}{a}}\frac{(a^2+\cancel{c^2}-b^2)}{\cancel{2c}} - \cancel{\frac{\sin(\beta)}{b}}\frac{(b^2+\cancel{c^2}-a^2)}{\cancel{2c}}}{\cancel{\frac{\sin(\alpha)}{a}}\frac{(\cancel{a^2}+c^2-\cancel{b^2})}{\cancel{2c}} + \cancel{\frac{\sin(\beta)}{b}}\frac{(\cancel{b^2}+c^2-\cancel{a^2})}{\cancel{2c}}}$$

$$\frac{2a^2-2b^2}{2c^2}$$

$$\frac{\cancel{2}(a^2-b^2)}{\cancel{2}c^2}$$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

como $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$

$$\frac{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} - \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}{\frac{\sin(\alpha)}{a}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} + \frac{\sin(\beta)}{b}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left[\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) - \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right]}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left[\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) + \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right]}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) - \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}{\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) + \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}$$

$$\frac{\dfrac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} - \dfrac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}{\dfrac{(a^2+c^2-b^2)}{2c} + \dfrac{(b^2+c^2-a^2)}{2c}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2c}\left[(a^2+c^2\ b^2) - (b^2+c^2-a^2)\right]}{\frac{1}{2c}\left[(a^2+c^2-b^2) + (b^2+c^2-a^2)\right]}$$

$$= \frac{(a^2+c^2\ b^2) - (b^2+c^2-a^2)}{(a^2+c^2-b^2) + (b^2+c^2-a^2)}$$

$$\frac{(a^2+c^2\ b^2)-(b^2+c^2-a^2)}{(a^2+c^2-b^2)+(b^2+c^2-a^2)}$$

$$= \frac{2a^2+2b^2}{2c^2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(a^2+b^2)}{\cancel{2}\,c^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{c^2}$$