



# Auxiliar 11: Sucesiones

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalacios J.  
Auxiliares: Sivert Escaff Gonzalez, Ignacio Dagach Abugattas

## P1. Para comenzar

Considere  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  y las siguientes sucesiones:

- $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $s_n = \sqrt{n + \frac{\gamma}{n}} - \sqrt{n}$
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $b_n = \sqrt{5 + |a_n| \cos^2(1 + \sqrt{2}n) + \sin(a_n + \sqrt{3}n)}$  y  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  acotada
- $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $c_n = (\sqrt{n + \frac{\gamma}{n}} - \sqrt{n})b_n^3$

- Determine para  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , por definición, su límite
- Demuestre que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada y que  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es nula

## P2. Matraca

Calcule los siguientes límites:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!) + 2n^2}{3n^2 + 4}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{n}})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-1)^n}{5 - (n-2)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})\sqrt{n+2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(24e^{n!})}{n}$

## P3. De controles

Considere la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por recurrencia  $x_{n+1} := \sqrt{\frac{8 + x_n^2}{3}}$ ,  $x_0 = 10$ .

- Demuestre que  $x_n \geq 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
- Demuestre que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona
- Concluya que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge y calcule su límite

**Resumen Auxiliar 11: Sucesiones**  
**Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024**  
**Auxiliar Ignacio Dagach Abugattas ♡☞**

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una sucesión real es una función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN (CONVERGENCIA) Diremos que la sucesión  $(s_n)$  converge a  $\ell$  o bien que los términos  $s_n$  tienden a  $\ell$  (lo cual anotaremos  $s_n \rightarrow \ell$ ) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

**Teorema 9.1.** Si  $(s_n)$  es una sucesión que converge a  $\ell_1 \in \mathbb{R}$  y también a  $\ell_2 \in \mathbb{R}$ , entonces necesariamente  $\ell_1 = \ell_2$ .

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN) Si  $(s_n)$  es una sucesión que converge a  $\ell$ , entonces  $\ell$  se llama *límite* de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_n s_n \quad \text{o bien} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NULA)  $(s_n)$  se llamará sucesión nula si  $s_n \rightarrow 0$ .

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA)  $(s_n)$  se llamará sucesión acotada si

$$(\exists M > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) |s_n| \leq M.$$

**Teorema 9.2.** Sean  $(u_n), (v_n)$  sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas

1.  $(u_n)$  es nula si y sólo si  $(|u_n|)$  es nula.
2. Si  $(u_n)$  es una sucesión nula entonces  $(u_n)$  es una sucesión acotada.
3. Si  $(u_n)$  es una sucesión nula y  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| \leq u_n$  entonces  $(v_n)$  es una sucesión nula.
4. Si  $(u_n)$  y  $(v_n)$  son sucesiones nulas entonces  $(u_n + v_n)$  y  $(u_n \cdot v_n)$  son sucesiones nulas.
5. Si  $(u_n)$  y  $(v_n)$  son sucesiones acotadas entonces  $(u_n + v_n)$  y  $(u_n \cdot v_n)$  son sucesiones acotadas.
6. Si  $(u_n)$  es una sucesión nula y  $(v_n)$  es una sucesión acotada entonces  $(u_n \cdot v_n)$  es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando  $v_n = c$  constante.

**Resumen Auxiliar 11: Sucesiones**  
**Introducción al Cálculo - MA1001-3 - Primavera 2024**  
**Auxiliar Ignacio Dagach Abugattas ♡☞**

- $s_n = a$ , para  $a \in \mathbb{R}$ , satisface  $\lim s_n = a$ .
- $\lim \frac{1}{n} = 0$ .
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ , para  $k \in \mathbb{N}$ .
- $s_n = n^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , no es acotada luego diverge.

$$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0},$$

para  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

- si  $p < q$ , entonces  $s_n \rightarrow 0$
- si  $p = q$ , entonces  $s_n \rightarrow \frac{a_p}{b_q}$
- si  $p > q$ , entonces  $(\frac{1}{s_n}) \rightarrow 0$ . Entonces  $(s_n)$  no es acotada y luego diverge.
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ .
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ , para  $a \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 9.1.** Sea  $(s_n)$  una sucesión de números reales entonces  $s_n \rightarrow \ell \iff (s_n - \ell)$  es una sucesión nula.

**Proposición 9.2.** Sea  $(s_n)$  una sucesión de números reales. Si  $(s_n)$  es convergente entonces  $(s_n)$  es acotada.

**Proposición 9.3 (Álgebra de límites).** Sean  $(u_n)$  y  $(v_n)$  dos sucesiones convergentes a  $u$  y  $v$ , respectivamente. Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces las sucesiones  $(u_n + v_n)$ ,  $(u_n - v_n)$ ,  $(u_n \cdot v_n)$  y  $(\lambda u_n)$  son también convergentes a  $u + v$ ,  $u - v$ ,  $u \cdot v$  y  $\lambda u$ , respectivamente.

Es decir, si  $u_n \rightarrow u$  y  $v_n \rightarrow v$  entonces:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$
- $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$ .

**Proposición 9.4.** Si  $(s_n)$  es una sucesión nula entonces la sucesión  $(\frac{1}{s_n})$ , de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.

**Proposición 9.6.** Sea  $(s_n)$  una sucesión real. Si  $(s_n)$  converge a  $\ell \neq 0$  entonces:

(1)  $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$  tal que  $s_n$  tiene el mismo signo de  $\ell$  (es decir  $s_n \cdot \ell > 0$ ).

(2) La sucesión  $(\frac{1}{s_n})$  es acotada.

**Proposición 9.7.** Sean  $(u_n)$  y  $(v_n)$  dos sucesiones convergentes a  $u$  y  $v$  respectivamente. Si  $v \neq 0$ , la sucesión  $(u_n/v_n)$  es convergente a  $(u/v)$ .

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$