Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 13: Sucesiones III

Recomendación: ver videos del semestre pasado, hay mucho material, links acá: https://www.youtube.com/@Nacho0307/playlists (pd: hay resumen de toda la materia)

Pauta P1.a)

Límite por deifnición de $x_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$

Desarrollo: Aux 9 semestre pasado:
https://www.youtube.com/watch?v=YYjDD4idvqo&t=509s
desde el minuto 15:07

Pauta P1.b)

Demuestre que, si $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ y $(a_n - b_n) \to 0$, entonces $b_n \to 0$

Desarrollo: Aux 9 semestre pasado:
https://www.youtube.com/watch?v=YYjDD4idvqo&t=509s
desde el minuto 2:02:40

Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 13: Sucesiones III

P1.a)

(s_n)

a) Demostrar, usando la definición de convergencia que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$. Sea $\varepsilon>0$ dado.

En efecto, $\left|\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right| = \left|\dfrac{\frac{n}{n+1}-1}{\sqrt{\frac{n}{n+1}}+1}\right| = \left|\dfrac{\frac{\cancel{n}-\cancel{n}-1}{n+1}}{\sqrt{\frac{n}{n+1}}+1}\right|$

$$= \frac{1}{(n+1)\left[\sqrt{\frac{n}{n+1}}+1\right]} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

2.0

Entonces, $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\left|\sqrt{\frac{n}{n+1}}-1\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

o bien $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\ n\varepsilon>1$ que es verdadero por la propiedad arquimediana.

1.0

Ignacio Dagach Abugattas
Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile
Pauta Auxiliar 13: Sucesiones III

P1.c)

(a) **(3.0 pts)** Muestre que $c_n := \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ converge.

Indicación: calcular $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$.

Solución

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}{\frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}} = \frac{(2n)!2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{2^{2n}(n!)^2(2(n+1))!} = \frac{(2n)!2((n+1)!)^2}{(2n+2)!(n!)^2},$$

0.5

así

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = 2\frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\left(\frac{(n+1)n!}{n!}\right)^2 = \frac{2(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

0.5

2

luego

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\underbrace{2n+1}_{\geq 0}} \geq 1,$$

0.5

entonces $c_n \geq c_{n+1}$, luego la sucesión (c_n) es decreciente. 0.5

Como $c_n \geq 0$ entonces (c_n) es acotada inferiormente. 0.5

Concluimos que converge por ser decreciente y acotada inferiormente.

Ignacio Dagach Abugattas

Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile

Pauta Auxiliar 13: Sucesiones III

P2.a)

P1

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \cdot \frac{1/3^n}{1/3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

Notemos que $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Por Álgebra de límites

$$= \frac{0+3}{0+1}$$

$$= 3$$

Ignacio Dagach Abugattas

Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile

Pauta Auxiliar 13: Sucesiones III

P2.b)

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{4^n + n^5}$

Primero acotaremos la expresión $\sqrt[n]{4^n + n^5}$

Notemos que $\forall n \geq 1$:

- $\sqrt[n]{4^n + n^5} \leq \sqrt[n]{4^n n^5 + 4^n n^5}$
$= \sqrt[n]{2 \cdot 4^n n^5}$
$= 4 \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n^5}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{4^n + n^5} \leq 4 \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n^5}$

- $\sqrt[n]{4^n + n^5} \geq \sqrt[n]{4^n} = 4$

Entonces: $4 \leq \sqrt[n]{4^n + n^5} \leq 4 \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\sqrt[n]{n^5}}_{\downarrow\, 1}$

Tomamos límite $n \to \infty$ $\quad \underset{4}{\downarrow}$

- $\lim\limits_{n \to \infty} 4 = 4$

- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ $\quad$ (Recuerdo: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $a \in \mathbb{R}^+$)

- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^5} = 1$ $\quad$ (Recuerdo: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

($\sqrt[n]{n^5} = \sqrt[n]{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$ y ocupamos álgebra de límites)

P2.c)

3. $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{1/n}$$

Notemos que lo anterior se parece a algo del estilo: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n}$, por lo tanto debemos ver si la sucesión q_n converge.

Veamos que:

$$\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1} = \frac{n^3(2n+1) - n^2(2n^2+1)}{(2n^2+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{2n^4} + n^3 - \cancel{2n^4} - n^2}{(2n^2+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n^3 - n^2}{4n^3 + 2n^2 + 2n + 1}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n^2}{4n^3 + 2n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^+$$

Sabemos que $\lim \sqrt[n]{q_n} = 1$ si $q_n \to q \in \mathbb{R}^+$

Como vimos que $q_n \to 1/4 \in \mathbb{R}^+$ concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{1/n} = 1 \quad //$$

Ignacio Dagach Abugattas

Introducción al Cálculo Primavera 2024, FCFM, Universidad de Chile

Pauta Auxiliar 13: Sucesiones III

P2.d)

4. $\lim_{n \to \infty} \left\{ \sqrt[n]{5n} - \frac{n^{100} \cos(n!)}{(1{,}01)^n} \right\}$

$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{5n} - \lim_{n \to \infty} \frac{n^{100} \cos(n!)}{(1{,}01)^n}$

$\rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{5n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{5} \cdot \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1$

$\rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n^{100} \cos(n!)}{(1{,}01)^n} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{n^{100} \cdot \left(\frac{1}{1{,}01}\right)^n}_{} \cdot \cos(n!)$

tiene la forma $n^k q^n$
como $k = 100 \in \mathbb{N}$ y
$q \in (-1, 1)$ tenemos que
$n^k q^n \to 0$

Además, $-1 \leq \cos(n!) \leq 1 \Rightarrow$ es una sucesión acotada.
Y sabemos que el límite de una sucesión nula por una sucesión acotada es 0

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n^{100}}{(1{,}01)^n} \cos(n!) = 0$

$\therefore \lim_{n \to \infty} \left\{ \sqrt[n]{5n} - \frac{n^{100}}{(1{,}01)^n} \cos(n!) \right\} = 1 \quad //$

P2.e)

0.1

iii. **(1.0 pts)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}}\right)^n$.

Solución Para $q_n = \dfrac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}}$, dividimos numerador y denominador entre 3^n

$$q_n = \frac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}} = \frac{\frac{n\sin(n^2)}{3^n}+1}{\frac{2n^3}{3^n}+3} = \frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin(n^2)+1}{2n^3\left(\frac{1}{3}\right)^n+3},$$

0.2

como $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ y $\sin(n^2)$ es acotada, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin(n^2) = 0,$$

0.2

además $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, entonces usando el álgebra de límites

0.2

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin(n^2)+1}{2n^3\left(\frac{1}{3}\right)^n+3} = \frac{0+1}{2(0)+3} = \frac{1}{3},$$

0.2

como $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}(q_n)^n = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}}\right)^n = 0.$$

0.2

P2.f)

0.5

(b) Calcule los siguientes límites

i. **(1.0 pts)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3a^n - nb^n}{n^5a^n + \sqrt{n^2+1}b^n}$ con $0 < a < b$.

Solución Dividiendo entre nb^n numerador y denominador tenemos

$$\frac{n^3a^n - nb^n}{n^5a^n + \sqrt{n^2+1}b^n} = \frac{n^2\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{n^4\left(\frac{a}{b}\right)^n + \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = \frac{n^2\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{n^4\left(\frac{a}{b}\right)^n + \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}.$$

0.4

Notamos que $q = \dfrac{a}{b}$ cumple $|q| = \dfrac{a}{b} < 1$ y por tanto $n^4q^n \to 0$ y $n^2q^n \to 0$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0,$$

0.4

como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, usando álgebra de límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3a^n - nb^n}{n^5a^n + \sqrt{n^2+1}b^n} = \frac{0-1}{0+\sqrt{1+0}} = -1.$$