Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

3 Derivadas

3.1 Funciones derivables

Definición 1 Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$, si existe el límite

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

Dicho límite se denota $f'(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ y se llama derivada de f en $\bar{x}$.

Observación De manera equivalente, f es derivable en $\bar{x}$ si existe una pendiente $m = f'(\bar{x})$ tal que la función afín $a(x) = f(\bar{x}) + f'(x)(x - \bar{x})$ es una aproximación de f en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$$

con $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Usando el cambio de variable $h = x - \bar{x}$, lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

o también

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si f es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en dicho punto.

Observación Algunas derivadas conocidas:

$f(x) = a + bx$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = b$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = x^2$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = 2\bar{x}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \cos(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \cos(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = -\operatorname{sen}(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \exp(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \exp(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \ln(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^+$.

3.2 Reglas de cálculo de derivadas

Proposición 1 Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces:

a) $f + g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f + g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$$

b) fg es derivable en $\bar{x}$ con

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

c) Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces f/g es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}$$

Observación Más derivadas conocidas:

$f_n(x) = x^n$ tiene derivada $f_n'(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f_n(x) = x^{-n}$ tiene derivada $f_n'(\bar{x}) = -n\bar{x}^{-n-1}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ tiene derivada

$p'(\bar{x}) = a_1 + 2a_2\bar{x} + 3a_3\bar{x}^2 + \cdots + na_n\bar{x}^{n-1}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \tan(x)$ tiene derivada

$f'(\bar{x}) = \sec^2(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \backslash \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

$f(x) = \operatorname{cotan}(x)$ tiene derivada

$f'(\bar{x}) = -\operatorname{cosec}^2(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

$f(x) = \operatorname{senh}(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \cosh(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \cosh(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \operatorname{senh}(\bar{x})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \tanh(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \frac{1}{\cosh^2(\bar{x})}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

$f(x) = a^x$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \ln(a)a^{\bar{x}}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \forall a > 0$.

Teorema 1 (Regla de la cadena). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c,d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

Teorema 2 (Derivadas de funciones inversas). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Observación Más derivadas conocidas:

$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}}$, $\forall \bar{x} \in (-1,1)$.

$f(x) = \arctan(x)$ tiene derivada $f'(\bar{x}) = \frac{1}{1 + \bar{x}^2}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.