Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Patricio Felmer

Matías Carvajal
Nicolás Fuenzalida

10 Aplicación de la Integral de Riemann

10.1 Cálculo de Áreas

Sea f una función no negativa sobre $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, queremos definir el área de las regiones del tipo:

$$R = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [0, f(x)]\}.$$

Si designamos el área de la región R por A_a^b, entonces las condiciones básicas de la definición de área son:

i) $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Longrightarrow A_a^b(f) \leq A_a^b(g)$

ii) $A_a^b(f) = A_a^c(f) + A_c^b(f), \quad \forall c \in [a,b]$

iii) $A_a^b(c) = c(b-a)$

Si la función f es integrable entre a y b, para que el área satisfaga las propiedades i), ii), iii), la única definición posible es:

$$\text{área}(R) = A_a^b(f) = \int_a^b f$$

Área de regiones definida por funciones no positivas

Si f es una función definida en $[a,b]$ con valores negativos, entonces el área de la región R encerrada sobre su gráfico, y debajo del eje de las x se puede calcular fácilmente como el área bajo la curva $y = -f(x)$. Luego se tendrá que el área es

$$\text{área}(R) = \int_a^b (-f) = \int_a^b |f|.$$

En general si f es una función que cambia de signo en $[a,b]$ un número finito de veces y R es la región comprendida entre el gráfico de f (por sobre o bajo, según corresponda) y el eje OX, entonces el área de la región R se podrá calcular como

$$A_a^b(f) = \int_a^b |f|.$$

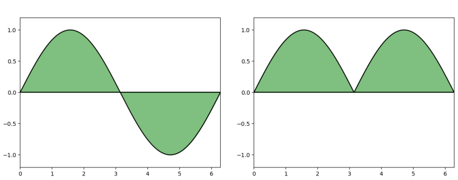

Figura 1: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)dx = 0$ y $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)|dx = 4.$

Observación No siempre es necesario integrar a lo largo del eje OX. En algunos casos, puede ser conveniente integrar a lo largo del eje OY, de la siguiente forma

$$A = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} x(y)dy$$

10.2 Volúmenes de Sólidos

Aceptemos que el concepto de volumen satisface las condiciones siguientes (análogas a las del área):

i) $A \subseteq B \Longrightarrow V(A) \leq V(B)$

ii) $V(A \cap B) = 0 \Longrightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

iii) Si A es un cilindro recto de base B y altura h, entonces $V(A) = B \cdot h$

Se prueba que si la función $A(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces el volumen del sólido es

$$V(C) = \int_a^b A(x)dx$$

10.3 Volumen de un sólido de revolución

Un sólido de revolución es la figura geométrica que se obtiene por la rotación de un área plana en torno a un eje fijo. Dos casos particulares se destacan y corresponden a los siguientes:

1. Rotación de la región: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ en torno al eje OX. Este caso corresponde a un caso particular de los sólidos donde se conoce el área transversal a una dirección dada. En efecto las secciones transversales al eje de rotación son círculos de radio $f(x)$. Por esta razón, su volumen se calcula como

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

2. Rotación de la misma región en torno al eje OY (bajo el supuesto que $0 < a < b$). En este caso no es difícil probar que el volumen de dicho sólido se puede calcular mediante la integral

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$$