MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 20 de Agosto de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Continuidad, Continuidad Uniforme y TVI

P1.- Considere la función $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1/x^2$. Estudie si la función es uniformemente continua en los siguientes casos, donde $0 < a < b$:

(i) $A = (0, \infty)$
(ii) $A = (a, b)$
(iii) $A = [a, \infty)$
(iv) $A = (a, \infty)$

P2.- Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$, tal que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Muestre que $\exists \lambda > 0$ tal que $f(x) + \lambda \leq g(x)$.

P3.- Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice Lipschitziana si

$$\exists L > 0,\, \forall x_1, x_2 \in A,\, |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

Muestre que si f es Lipschitziana, entonces es uniforme continua.

P4.- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I, y estrictamente creciente. Si $f(I)$ es un intervalo, ¿es f continua?

P5.- **[Propuesto]** Sean $f : I \to f(I)$ y $g : I \to g(I)$ estrictamente crecientes y continuas, con I un intervalo, y tales que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in I$. Sean φ y ψ las inversas de f y g, respectivamente (argumente por qué f y g tienen inversas). Muestre que $\varphi(y) \leq \psi(y)$, $\forall y \in f(I) \cap g(I)$.

Resumen

- **[Teorema]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces $\exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
- **[TVI]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces $\forall e \in [c, d]$, o ($\forall e \in [d, c]$,), $\exists x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.
- **[Weierstrass]** Sea : $[a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.
- **[Teorema]** Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.
- **[Def: Continuidad Uniforme]** La función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si cumple que:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A,\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
- **[Teorema]** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es continua uniforme ssi es continua en todo punto $\overline{x} \in A$.