MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Ignacio Díaz & Sebastián Gangas.
Fecha: 3 de Septiembre de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 4: Expansión de Taylor y más derivadas

P1.- **[Teorema de Taylor]** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k + 1)$-veces difereneciable en el intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en torno a $\overline{x} \in (a, b)$. Muestre que, $\forall x > \overline{x}$, $\exists \xi \in (\overline{x}, x)$, tal que se cumplen:

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$

[Propuesto] Muestre además que el error se puede escribir como:

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k(x - \overline{x})$$

P2.- **[Método de Newton]** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y supongamos que $x^* \in (a, b)$ es una solución de la ecuación $f(x^*) = 0$, tal que $f'(x^*) \neq 0$. Muestre que existen constantes $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tales que para todo punto de partida $x_0 \in I_\varepsilon := (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ el método de Newton está bien definido y converge hacia x^* con

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$$

P3.- Muestre que si una función es tal que $f''(\overline{x})$ existe, entonces cumple que:

$$f''(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) + f(\overline{x} - h) - 2f(\overline{x})}{h^2}$$

además, muestre que si f tiene un máximo local en $\overline{x}$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) + f(\overline{x} - h) - 2f(\overline{x})}{h^2} \leq 0$$

P4.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) = f(b)$ y tal que el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) + f(\overline{x} - h) - 2f(\overline{x})}{h^2}$$

es 0 para todo $x \in (a, b)$. Muestre que f es constante en $[a, b]$.

[Propuesto] Muestre que si f es continua en $[a, b]$, tal que el límite anterior es 0 en todo punto de (a, b), entonces f es lineal.

Resumen

- **[TVM]** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, $\exists \xi \in (a, b)$ tal que:
$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$
en particular, si $g(x) = x$ se tiene:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$
- **[Derivada de orden k]** Se define recursivamente como:
$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x)$$
Se define el espacio $C^k([a, b])$ como el de las funciones k-derivables de k-derivada continua, que van de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, para $a < b$. Además, definimos
$$C^\infty = \bigcap_{k \geq 0} C^k$$
- **[Expansión de Taylor]** Se define la expansión de Taylor de orden k de f, en torno a $\overline{x}$ como:
$$\begin{aligned} T^k_{\overline{x}}(t) :=& f(\overline{x}) + f'(\overline{x})t + \frac{f''(\overline{x})}{2}t^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}t^k \\ =& \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}t^n \end{aligned}$$