**MA1002 Cálculo Diferencial e Integral**
**Profesor:** Cristián Reyes.
**Auxiliares:** Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
**Fecha:** 24 de Septiembre de 2024

# Auxiliar 6: Primitivas y funciones escalonadas

**P1.-** Calcule las siguientes primitivas:

(a) $\int \cos(u)\sin^3(u)\,du$

(b) $\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}\,dx$

(c) $\int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy$

(d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$

(e) $\int u\sqrt{2-u}du$

**P2.-** Definimos:

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

muestre que la integral está definida por la expresión de recurrencia:

$$(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}$$

**P3.-** Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes condiciones:

(i) $\varphi$ es continua salvo en una cantidad finita de puntos.

(ii) $\mathrm{Im}(\varphi)$ es un conjunto finito.

(iii) $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$, y $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

Demuestre que existe un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y una función escalonada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$ y $\varphi(x) = 0$, si $x \notin [a, b]$.

**P4.-** Sea $\varphi$ una función escalonada en $[a, b]$, y la función afín $f(x) = mx + n$. Muestre que $\varphi \circ f$ es escalonada.

**P5.-** **[Propuesto]** La función *indicatriz* de un conjunto $A$ se define como:

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Muestre que toda función escalonada es una combinación lineal de indicatrices de intervalos.

# Resumen

- **[Primitiva]** Una función $F$ continua en $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, derivable en $\text{Int}(I)$, se le dice *primitiva* de una función $f$ sobre $I$, ssi:
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \text{Int}(I)$$
notar que, dado que una función constante tiene derivada nula en un intervalo, y además si una función tiene derivada nula en un intervalo entonces la función es constante, se obtiene que: $F_1$ y $F_2$ dos primitivas de $f$, entonces $\exists c \in \mathbb{R},\ F_1(x) = F_2(x) + c\,, \forall x \in \text{Int}(I)$.

- **[Integral indefinida]** Llamaremos *integral indefinida* al conjunto de todas las primitivas de una función $f$. La denotaremos $\int f(x)dx$. Puesto de esta forma, una primitiva particular, la escribimos como $\int f(x)dx+c$.

  La integral indefinida es un operador **lineal**.

- **[Cambio de variable]** Si $u = g(x)$, entonces:
$$\int f(u)\,du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int f = \int (f \circ g) \cdot g'$$

- **[Integración por partes]** Sean $u$ y $v$ dos funciones de $x$, entonces:
$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\,dx$$
escrito equivalentemente:
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
para $dv = v(x)\,dx$ y $du = u(x)\,dx$.

- **[Función escalonada]** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *escalonada*, si $\exists P = (x_0, \ldots, x_n)$ partición de $[a, b]$, tal que $f$ es constante en cada intervalo abierto $I_i = (x_i, x_{i+1}),\ i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.