MA1002 Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 9 de Octubre de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 8: Funciones Riemann Integrables

P1.- Calcule

(a) $F'(x)$, si $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)\,dt$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sin(t)\,dt}{\int_0^x e^t - 1\,dt}$

P2.- Sea $x > 0$, encuentre la función $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

P3.- Encuentre todas las funciones dos veces diferenciables en todo $\mathbb{R}$, tales que:

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,dt$$

P4.- Si $A = \int_0^{\pi} \frac{\sin(z)}{2+z}\,dz$. Calcule $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+x}\,dx$ en términos de A.

P5.- **[Propuesto]** Muestre que $\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

P6.- **[Propuesto]** Sean f, g integrables en el intervalo $[a, b]$, muestre que $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$.

Resumen

- **[Integrabilidad]** Toda función continua en $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$, para $a < b$. En particular, toda función derivable es integrable, y se tiene la implicancia:

  $$\text{Derivable} \implies \text{Continua} \implies \text{Riemann Integrable}$$

  Sean f y g son integrables, y un $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, las siguientes funciones son integrables:

  - $\alpha f + g$
  - $f \cdot g$

  ¡OJO $f \cdot g$ **no está mostrado que es integrable en el apunte!** por lo que para usarlo en control deben preguntar si hay que demostrarlo o no.

- **[Propiedades de la integral]**: sean f y g integrales en $[p, q]$ y $a, b \in [p, q]$, entonces:

  1. $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b - a)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
  2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, $\forall c \in [p, q]$
  3. $\displaystyle\alpha f = \alpha \int_a^b f$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
  4. $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
  5. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [p, q]$ entonces $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$
  6. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
  7. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$
  8. Si $a > b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$