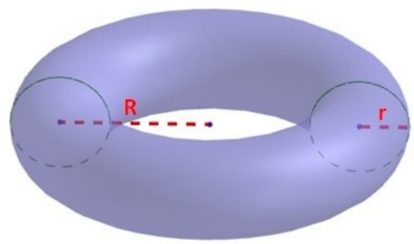
MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Cristián Reyes
Auxiliares: Ignacio Díaz & Sebastián Gangas
Fecha: 23 de Octubre de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 10: Aplicaciones de la integral de Riemann

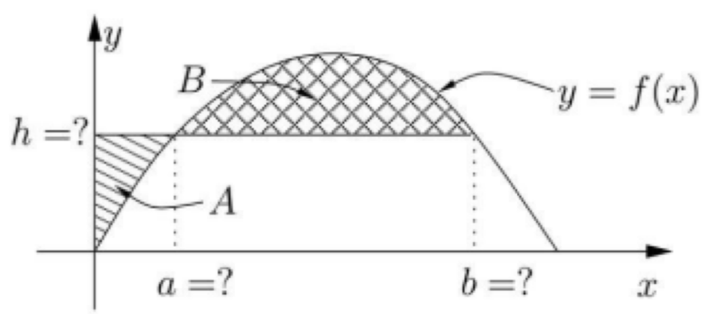
P1.- El cuerpo de la imagen se llama Toro, el cual es un sólido de revolución. Encuentre su volumen.



P2.- Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, de clase C^1 y la longitud de la curva que define en el intervalo $[0,x]$ es $x^2+2x-f(x)$. Determinar f.

P3.- Calcule el área encerrada por la curva interior del la función $r(\theta)=1+2\cos(\theta)$. Para esto, primero grafique la función en el plano.

P4.- Dada la función $f(x)=2x-3x^3$, determine la altura de la recta $x=h$ de modo que las áreas A y B sean iguales:



Luego, calcule el centro de gravedad del área total $A+B$.

- **[Área de regiones definidas por funciones]** Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable positiva, el área de la región definida por la función $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$, se calcula como:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Área}(R)$$

  En el caso de una región definida por una función no necesariamente positiva, se calcula como:

$$\int_a^b |f| = \text{Área}(R)$$

- **[Volumen de un sólido]** Para una función $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable que genera un sólido, el volumen de dicho sólido $V(C)$ resulta:

$$V(C) = \int_a^b A(x)dx$$

  Para sólidos de revolución, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es la función que define la curva que rota, el volumen del sólido de revolución generado por f resulta:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \qquad \text{para el eje } OX$$
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \qquad \text{para el eje } OY$$

  Además, la superficie del sólido generado por f se calcula como:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + |f(x)|^2} dx$$

- **[Longitud de una curva]** La longitud de la curva definida por una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se calcula como:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

- **[Coordenadas polares]** Para escribir un punto $P = (x, y)$ en coordenadas polares, se hace el siguiente cambio de variables:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

  donde el par (r, θ) corresponderá a las coordenadas polares del punto P, y (x, y) son sus coordenadas cartesianas. En resumen:

$$P = (x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

- **[Área en coordenadas polares]** Para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y en coordenadas polares, el área de la región que define $R = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [a, b], r \in [0, f(\theta)])\}$, se calcula como:

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$$

- **[Centro de gravedad y Momento estático]** Para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, el centro de masa del área definida por la función R, se calcula como:

$$X_G = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

$$Y_G = \frac{\displaystyle\int_a^b (f(x)^2 dx)}{2\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

donde X_G y Y_G son las coordenadas cartesianas del centro de gravedad, es decir, si llamamos CG al centro de gravedad, $CG = (X_G, Y_G)$.

Además, si llamamos por M_{OX} el momento estático para el eje X y M_{OY} para el eje Y, se cumplen las ecuaciones:

$$M_{OX} = Y_G \cdot m$$
$$M_{OY} = X_G \cdot m$$