MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliares: Sebastián Gangas & Ignacio Díaz.
Fecha: 13 de Noviembre de 2024

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 12: Series

P1.- Determine si las siguientes series convergen o no:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt[3]{n^2-10}}{(n-1)^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ln(\ln(n))}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$

P2.- Sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ continua y creciente en $[0,1]$ con $g(0)=0$. Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si y sólo si la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}dx$ converge.

P3.- Muestre que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ es convergente.

P4.- Decida si la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n!e^n}{n^n}$ converge o no.

P5.- Muestre que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{e^n}\in(2/e,2)$.

P6.- Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones positivas, ¿qué puede decir de la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ cuando $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$?, ¿y si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$?

Resumen

- **[Serie]** Se define una serie s como el límite de las sumas parciales $(s_n)_n$:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

  donde $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales.

- **[Sucesión de Cauchy]** Para una sucesión $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ se dice que es de Cauchy si cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- **[Teorema]** Para $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, la sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente.

- **[Criterio de Cauchy]** Sea $(a_n)_n$ una sucesión y $(s_n)_n$ la sucesión de sus sumas parciales. La serie $\sum a_k$ converge ssi:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ m > n,\ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

- **[Teorema]** Si la serie $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \to 0$.

- **[Teorema]** Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes, entonces:

  1. $\sum(a_k + b_k)$ es convergente, y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.
  2. $\forall \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda a_k$ es convergente, y su valor es $\lambda(\sum a_k)$.

- Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.

- **[Teorema]** Sea $\sum a_k$ una serie de términos no-negativos y convergente. Sea $(b_k)_k$ una numeración del conjunto $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\sum b_k$ es convergente, y $\sum b_k = \sum a_k$.

- **[Mayoración de series]** Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones no-negativas de modo que existen n_0 y $\alpha > 0$ tales que, $\forall n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que:

$$\sum b_k < \infty \Longrightarrow \sum a_k < \infty$$

- **[Comparación por cuociente]** Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones positivas, y supongamos que $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe, entonces:

  1. Caso $c = 0$: $\sum b_k < \infty \Longrightarrow \sum a_k < \infty$.
  2. Caso $c > 0$: $\sum b_k < \infty \Longleftrightarrow \sum a_k < \infty$.

- **[Criterio del cuociente]** Sea $(a_n)_n$ una sucesión positiva, y supongamos que el límite $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, entonces:

  1. Si $r < 1$: $\sum a_k$ converge.
  2. Si $r > 1$ o $r = \infty$: $\sum a_k$ diverge.
  3. Si $r = 1$: $\sum a_k$ puede converger o diverger.

- **[Criterio de la raíz n-ésima]** Sea $(a_n)_n$ una sucesión positiva, y supongamos que el límite $r = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ existe, entonces:

  1. Si $r < 1$: $\sum a_k$ converge.
  2. Si $r > 1$ o $r = \infty$: $\sum a_k$ diverge.
  3. Si $r = 1$: $\sum a_k$ puede converger o diverger.

- **[Criterio de la Integral impropia]** Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ decreciente, entonces:

$$\sum_{n\geq 1} f(n) < \infty \Longleftrightarrow \int_1^\infty f < \infty$$