Ejercicio (25 min.)

Sea $\mathcal{G} = \{\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\, \varphi_{a,b}(x) = ax + b,\ \text{donde } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

1. (3 ptos.) Demuestre que $(\mathcal{G}, \circ)$ es un grupo. [**Sugerencia:** Asuma que el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\, f \text{ biyectiva}\}$ es un grupo con la composición $\circ$ de funciones, encuentre $\varphi_{a,b}^{-1}$ explícitamente y use la caracterización de subgrupo, es decir, pruebe que $\mathcal{G} \neq \emptyset$ y que $\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d}^{-1}$ está en $\mathcal{G}$ (¿es decir?) para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a, c \neq 0$.]

   Solución:

   Siguiendo la sugerencia, tenemos que $\varphi_{a,b}^{-1}$, si existe, es una función que satisface $\varphi_{a,b}^{-1} \circ \varphi_{a,b} = \varphi_{a,b} \circ \varphi_{a,b}^{-1} = id_{\mathbb{R}}$. Así, para encontrarla hacemos $\varphi_{a,b}(\varphi_{a,b}^{-1}(x)) = x \iff a\varphi_{a,b}^{-1}(x) + b = x \iff \varphi_{a,b}^{-1}(x) = a^{-1}x - a^{-1}b$ $(a \neq 0)$. [1 pto.] Se comprueba que tal función cumple $\varphi_{a,b}^{-1} \circ \varphi_{a,b} = id_{\mathbb{R}}$. Por lo tanto, $\varphi_{a,b}^{-1} = \varphi_{a^{-1},-a^{-1}b} \in \mathcal{G}$.[0,4 ptos.] Ahora $\mathcal{G} \neq \emptyset$ pues $id_{\mathbb{R}} = \varphi_{1,0}$.[0,6 ptos.] Finalmente, notamos que la función $\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d}^{-1}$ está dada por

$$\begin{aligned}
\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d}^{-1}(x) = \varphi_{a,b} \circ \varphi_{c^{-1},-c^{-1}d}(x) &= \varphi_{a,b}\left(\varphi_{c^{-1},-c^{-1}d}(x)\right) \\
&= a(c^{-1}x - c^{-1}d) + b \\
&= ac^{-1}x + (-ac^{-1}d + b) \\
&= \varphi_{ac^{-1},-ac^{-1}d+b} \in \mathcal{G}.
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $(\mathcal{G}, \circ)$ es subgrupo de $(\mathcal{F}, \circ)$ y, en particular, es un grupo.[1 pto.]

2. (3 ptos.) Demuestre que $\mathcal{G}^1 = \{\varphi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\, \varphi_b(x) = x + b,\ \text{donde } b \in \mathbb{R}\}$ es un subgrupo de $\mathcal{G}$. [**Sugerencia:** encuentre explícitamente φ_b^{-1} y use la caracterización de subgrupo.]

   Solución:

   Notamos que $\varphi_b = \varphi_{1,b}$ del item anterior. Por lo tanto, $\varphi_b^{-1} = \varphi_{1,b}^{-1} = \varphi_{1,-b} = \varphi_{-b} \in \mathcal{G}^1$. [1,2 ptos.] Usando la caracterización de subgrupo tenemos que $\mathcal{G}^1 \neq \emptyset$ pues $id_{\mathbb{R}} = \varphi_0$. [0,6 ptos.]Usando el cálculo del item anterior, se tiene que

$$\varphi_b \circ \varphi_d^{-1} = \varphi_b \circ \varphi_{-d} = \varphi_{b-d} \in \mathcal{G}^1.$$

   Por lo tanto, $(\mathcal{G}^1, \circ)$ es subgrupo de $(\mathcal{G}, \circ)$.[1,2 ptos.]

   Nota: $\mathcal{G}^1$ es un subgrupo abeliano, pues $\varphi_b \circ \varphi_d = \varphi_{b+d} = \varphi_{d+b} = \varphi_d \circ \varphi_b$, del grupo no abeliano $\mathcal{G}$.