Auxiliar 1

Matrices y sus propiedades

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 12 de agosto de 2024

P1. [Operatoria entre matrices]
Considere las matrices B, F, M y T definidas más abajo, y realice las distintas operaciones definidas para matrices (sumar, restar, multiplicar por ambos lados y trasponer) entre ellas de a pares, siempre que tengan sentido.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ i & -3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

P2. [Propiedades de matrices]

a) Para A, B matrices cuadradas simétricas, demuestre que AB es simétrica si y solo si $AB = BA$.

b) Sean D y M matrices cuadradas, con D diagonal donde las entradas no nulas son todas diferentes entre sí. Pruebe que si M no es diagonal entonces M y D no conmutan.

c) Para una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se define su traza $T(A)$ como la suma de los coeficientes en la diagonal. Demuestre $\forall A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \forall \mu \in \mathbb{R}$: **i)** $T(A+B) = T(A) + T(B)$ **ii)** $T(\mu A) = \mu T(A)$ **iii)** $T(AB) = T(BA)$.

d) Considere A, B matrices cuadradas que conmutan. Muestre que **i)** $A^n B = BA^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ **ii)** $A^T B^T = B^T A^T$.

e) Una matriz A se dice triangular superior si es cuadrada y es tal que que $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$. Considere A, B matrices triangular superior a valores reales. Demuestre que **i)** AB es triangular superior **ii)** $(AB)_{ii} = (BA)_{ii} \ \forall i \leq n$.

f) Asuma A, B y $\left(A + B^{-1}\right)$ matrices invertibles, y pruebe que $\left(A^{-1} + B\right)^{-1} = A\left(A + B^{-1}\right)^{-1} B^{-1}$.

g) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que es invertible y $B^5 - B = 0$. Calcule B^{-1}.

h) Sea $A = 1 \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $n > 1$. Encuentre $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $(I - A)^{-1} = I + \beta A$.

P3. [Matrices por bloques e invertibilidad]

a) Estudie el siguiente producto matricial:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 29 & -5 & 10 & 28 \\ 34 & 29 & 9 & 18 \\ \hline 8 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

b) Sean A, B, C matrices cuadradas de $n \times n$, con A, C invertibles. Muestre que $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ es invertible, con inversa de la forma $\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 0 & Z \end{array}\right)$, y calcule las matrices X, Y, Z cuadradas de $n \times n$.

P4. [Potencias]
Una matriz P se dice de proyección si es cuadrada y satisface $P^2 = P$.

a) Demuestre que si P es matriz de proyección, entonces $Q = I - P$ es matriz de proyección.

b) Muestre que si además P es invertible, entonces que $P = I$ y $Q = 0$.

c) Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tales que $P_1 = P_1 P_2$ y $P_2 = P_2 P_1$. Muestre que ambas son matrices de proyección.

d) Pruebe que P es una matriz de proyección si y solo si $P^2(I - P) = 0$ y $P(I - P)^2 = 0$.

e) Encuentre $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $P \neq P^2$ y $P^2(I-P) = 0$.

P5. [Matrices unitarias]

Una matriz U se dice unitaria si es cuadrada y satisface $U^TU = I$. Para $U, U_1, U_2 \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ matrices unitarias:

a) Pruebe que **i)** U es invertible de inversa unitaria $U^{-1} = U^T$ **ii)** U_1U_2 es unitaria.

b) Demuestre que $I - 2uu^T$ es unitaria $\forall u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^Tu = 1$.

c) Se define la matriz $G(\theta)$ por $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ para $\theta \in \mathbb{R}$. Muestre que $G(\theta)$ es unitaria.

Principales definiciones y propiedades

- **[Matriz]:** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ es una tabla de doble entrada con m filas y n columnas, representada por $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ donde cada coeficiente o entrada $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($\forall i, j \in [1..n]$) donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dos matrices son iguales si y solo si coinciden en dimensión y entradas.

- **[Estructuras de matrices y operatoria]:** $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), +)$ tiene estructura de grupo abeliano, con la matriz nula como neutro aditivo e inverso aditivo definido como la matriz de valores opuestos. $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo no conmutativo y con divisores de cero, de unidad igual a la matriz identidad; no todos los elementos tienen inverso multiplicativo, pero en caso de que exista, se tiene unicidad. Se cumple la asociatividad, distributividad por ambos lados y factorización de escalares:
  - $A(BC) = (AB)C$
  - $A(B + \mu C) = AB + \mu AC$

  definidas respectivamente para A, B, C matrices t.q. sus operaciones tienen sentido y μ un escalar.

- **[Producto matricial]:** Sean $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$, entonces el producto $AB = C$ se define en $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ y sus coeficientes se definen por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$ $\forall (i,j) \in [1..m] \times [1..n]$. Notar que la multiplicación de matrices no conmuta.

- **[Matriz traspuesta]:** $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ denota a la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, que intercambia sus filas por columnas i.e. $a^T_{ij} = a_{ji}$ $\forall (i,j) \in [1..n] \times [1..m]$ (la primera fila de A^T es la primera columna de A y así sucesivamente).
  - $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{rm}(\mathbb{K})$: $\left(A^T\right)^T = A$ y $(BC)^T = C^TB^T$.

- **[Definición de algunas matrices cuadradas]:** $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dice **triangular superior** si sus coeficientes son nulos por debajo de la diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i > j$); se dice **triangular inferior** si sus coeficientes son nulos por sobre la diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i < j$); se dice **diagonal** si es triangular superior e inferior simultáneamente i.e. solo tiene coeficientes en diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$); se dice **simétrica** si verifica $A = A^T$ equivalente a $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j \in [1..n]$; se dice **identidad** si es diagonal y cada una de sus entradas no nulas es igual a 1 ($a_{ij} = 1\ \forall i = j$), y es el neutro multiplicativo.
  - $D^T = D$ si D es diagonal.
  - Si A es diagonal con $a_{ii} \neq 0\ \forall i \leq n$, entonces es invertible y su inversa también es diagonal con $\left(A^{-1}\right)_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$ $\forall i \leq n$.
  - Producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior).
  - Para $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertibles, entonces:
    - $\left(A^{-1}\right)$ es invertible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
    - AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
    - $\forall n \geq 0$ $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$.
    - A^T es invertible y $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

- **[Potencias de una matriz]:** Para $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$ se definen sus potencias de manera recursiva con $A^0 = I$ y $A^n = AA^{n-1}$ $\forall n \geq 1$.