Auxiliar 2

Más propiedades de matrices y aplicaciones

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 19 de agosto de 2024

P1. [Ecuación matricial]
Considere la ecuación matricial en X dada por $MX = J$, donde M es de $m \times n$ y J es de $m \times 1$. Muestre que si X_1, X_2 son soluciones de la ecuación, entonces $4X_2 - 3X_1$ también lo es.

P2. [Proporcionalidad]
Suponga que tiene tres matrices de iguales dimensiones A, B, C que verifican las siguientes dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} A + 3B - C &= 0 \\ 2A - B - C &= 0 \end{cases}$$

Pruebe que A y B son proporcionales a C, es decir, que existen números reales α, β tales que $A = \alpha C$ y $B = \beta C$.

P3. [Más operatoria entre matrices]

a) Considere las matrices $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ \frac{1}{5} & 9 & 3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Estudie el producto matricial entre ellas.

b) Considere la matriz identidad de $n \times n$ e intercambie dos de sus filas (la l-ésima con la k-ésima, por ejemplo, con $l, k \leq n$); denomine esta matriz como H. Justifique que para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, se tiene que la matriz resultante del producto HA corresponde a la matriz A con sus filas l Y k intercambiadas.

P4. [Simetría]
Considere $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $M^T M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible. Se define la matriz P de m filas y m columnas en términos de M de manera que $P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ como $P = I - M\left(M^T M\right)^{-1} M^T$. Demuestre que: **i)** $P^2 = P$ y que PM es la matriz nula de $m \times n$ **ii)** las matrices $M^T M$ y P son simétricas **iii)** P no es invertible.

P5. [Puros unos]
Sean $J \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $e \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ matrices tales que $J_{ij} = e_{i1} = 1 \ \forall i, j \leq n$ **i)** Pruebe que $Je = ne$ y que $J^2 = nJ$. **ii)** Para $\mu \neq \dfrac{1}{n}$, determine $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $(I - \mu J)^{-1} = I + \gamma J$. **iii)** Verifique $(I - \mu J)\, e = 0$ si $\mu = \dfrac{1}{n}$.

P6. [Matrices e invertibilidad]

a) Sea $\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Calcule $\mathbb{1}^T \mathbb{1}$ y $\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ y determine el conjunto en que vive cada producto matricial.

b) Considere la matriz identidad I de tamaño 3×3. Se define para cada $a \in \mathbb{R}$ la matriz M_a de forma que: $M_a = (1-a)I + a\mathbb{1}\mathbb{1}^T = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que para $d, e \in \mathbb{R}$ se satisface

$$M_a \cdot \left(dI + e\mathbb{1}\mathbb{1}^T\right) = (1-a)dI + \left((1-a)e + 3ae + ad\right)\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$

c) Para cada $a \notin \{1, -\frac{1}{2}\}$ encuentre d, e en la parte anterior tal que $dI + e\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ sea la inversa de M_a.

Principales definiciones y propiedades

- **[Matriz]:** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ es una tabla de doble entrada con m filas y n columnas, representada por $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ donde cada coeficiente o entrada $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(\forall i, j \in [1..n])$ donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dos matrices son iguales si y solo si coinciden en dimensión y entradas.

- **[Estructuras de matrices y operatoria]:** $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), +)$ tiene estructura de grupo abeliano, con la matriz nula como neutro aditivo e inverso aditivo definido como la matriz de valores opuestos. $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo no conmutativo y con divisores de cero, de unidad igual a la matriz identidad; no todos los elementos tienen inverso multiplicativo, pero en caso de que exista, se tiene unicidad. Se cumple la asociatividad, distributividad por ambos lados y factorización de escalares:
  - $A(BC) = (AB)C$
  - $A(B + \mu C) = AB + \mu AC$

  definidas respectivamente para A, B, C matrices t.q. sus operaciones tienen sentido y μ un escalar.

- **[Producto matricial]:** Sean $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$, entonces el producto $AB = C$ se define en $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ y sus coeficientes se definen por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$ $\forall (i, j) \in [1..m] \times [1..n]$. Notar que la multiplicación de matrices no conmuta.

- **[Matriz traspuesta]:** $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ denota a la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, que intercambia sus filas por columnas i.e. $a^T_{ij} = a_{ji}$ $\forall (i, j) \in [1..n] \times [1..m]$ (la primera fila de A^T es la primera columna de A y así sucesivamente).
  - $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{rm}(\mathbb{K})$: $\left(A^T\right)^T = A$ y $(BC)^T = C^T B^T$.

- **[Definición de algunas matrices cuadradas]:** $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dice **triangular superior** si sus coeficientes son nulos por debajo de la diagonal ($a_{ij} = 0$ $\forall i > j$); se dice **triangular inferior** si sus coeficientes son nulos por sobre la diagonal ($a_{ij} = 0$ $\forall i < j$); se dice **diagonal** si es triangular superior e inferior simultáneamente i.e. solo tiene coeficientes en diagonal ($a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$); se dice **simétrica** si verifica $A = A^T$ equivalente a $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j \in [1..n]$; se dice **identidad** si es diagonal y cada una de sus entradas no nulas es igual a 1 ($a_{ij} = 1$ $\forall i = j$), y es el neutro multiplicativo.
  - $D^T = D$ si D es diagonal.
  - Si A es diagonal con $a_{ii} \neq 0$ $\forall i \leq n$, entonces es invertible y su inversa también es diagonal con $\left(A^{-1}\right)_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$ $\forall i \leq n$.
  - Producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior).
  - Para $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertibles, entonces:
    - $\left(A^{-1}\right)$ es invertible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
    - AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
    - $\forall n \geq 0$ $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$.
    - A^T es invertible y $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

- **[Potencias de una matriz]:** Para $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$ se definen sus potencias de manera recursiva con $A^0 = I$ y $A^n = AA^{n-1}$ $\forall n \geq 1$.