DESARROLLO AUX 1

MATRICES Y SUS PROPIEDADES

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

diagonal

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ i & -3\end{pmatrix} \quad M=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 6\\ 4 & 6 & 0\end{pmatrix} \quad T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

Hay que realizar (de a pares) las distintas operaciones definidas para matrices entre ellas siempre que tengan sentido (sumar, restar, multiplicar por ambos lados y trasponer).

Para esto, considerar que:

* suma/resta solo está definida para matrices del mismo tamaño

$$A,B\in\mathcal{M}_{m\times n} \Rightarrow A\pm B\in\mathcal{M}_{m\times n}$$

$\Rightarrow$ $B\pm F$, $B\pm T$, $F\pm M$, $M\pm T$ no están bien definidas
pero $B\pm M$, $F\pm T$, $B\pm B$, $M\pm M$, $F\pm F$, $T\pm T$ están OK

* multiplicación está bien definida siempre que la matriz que premultiplica tenga tantas columnas como filas tenga la que postmultiplica

$$A\in\mathcal{M}_{m\times r},\ B\in\mathcal{M}_{r\times n} \Rightarrow AB\in\mathcal{M}_{m\times n}$$

$\Rightarrow$ FB, FF, FM, FT, TB, TF, TM, TT no están bien definidas
pero BB, BF, BM, BT, MB, MF, MM, MT están OK

* trasponer es intercambiar filas por columnas, y no tiene ninguna restricción!

$$A\in\mathcal{M}_{m\times n} \Rightarrow A^T\in\mathcal{M}_{n\times m} \wedge (A^T)_{ij}=a_{ji}$$

↳ si ocurre que $A=A^T$, A se dice simétrica.

Solo algunas:

- $B+M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

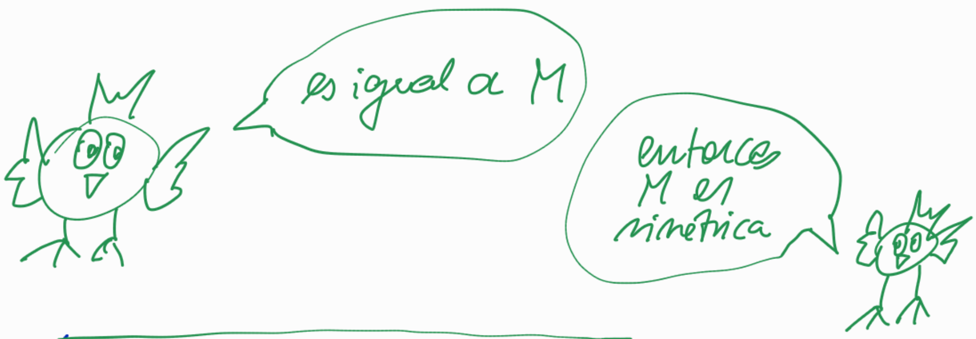
- $F+T = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \\ 2+i & 0 \end{pmatrix}$

- $BM = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -8 \\ -15 & -25 & -30 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

- $BF = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -5 \\ i & -3 \end{pmatrix}$

- $F^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- $M^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

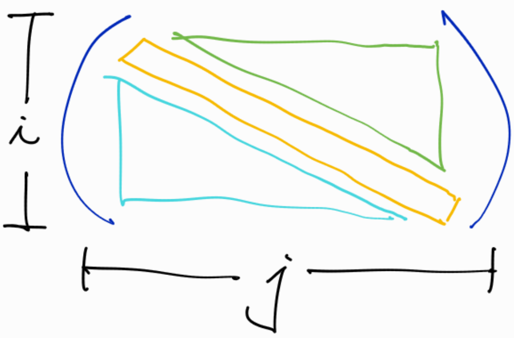


$$\boxed{\begin{array}{l} (A^T)^T = A \\ D^T = D \text{ si } D \text{ diagonal} \\ (AB)^T = B^T A^T \end{array}}$$

P_2

Importante:

Una matriz se puede visitar por ciertos lugares como:



diagonal $i=j$

superior $i<j$

inferior $i>j$

a) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétricas.

P.D.Q. AB simétrica ssi $AB = BA$

La idea será considerar la definición de matriz simétrica como que no cambia si se transpone.

En efecto,
por doble implicancia:

$\Rightarrow)$ AB simétrica.
P.D.Q. $AB = BA$

Luego $AB \underset{\text{def. } AB \text{ simétrica}}{=} (BA)^T \underset{\text{prop.}}{=} B^T A^T \underset{\substack{B^T = B \\ A^T = A}}{=} BA$.

pues A y B son simétricas

Sigue que $AB = BA$ //

$\Leftarrow)$ $AB = BA$.
P.D.Q. AB simétrica

$$\Leftrightarrow AB \underset{\text{def. simetría}}{=} (BA)^T \underset{\text{prop.}}{=} B^T A^T \underset{\substack{B^T = B \\ A^T = A}}{=} BA \overset{\text{hipótesis}}{=} AB \Leftrightarrow V \ //$$

pues A y B son simétricas

Luego $AB = BA$ ssi AB simétrica, mostrando lo pedido. $\blacksquare$

b) $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal de coeficientes diferentes entre sí en diagonal

P.D.Q. $MD = DM \Rightarrow M$ es diagonal

La idea es utilizar def. del producto y recordar que una matriz diagonal tiene entradas nulas fuera de la diagonal ($d_{ij}=0 \ \forall i\neq j$).

En efecto,

Supóngase $MD=DM$.

Se quiere ver que M es diagonal $\Leftrightarrow m_{ij}=0 \ \forall i=j,\ i,j\leq n$.

Pero $MD=DM \Rightarrow (MD)_{ij}=(DM)_{ij} \ \forall i,j\in[1..n]$.

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}m_{kj}$$; pero $d_{kj}=d_{kk}=d_{ik}$ en cada $k\leq n$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sum_{k>j} m_{ik}\underbrace{d_{kj}}_{0}} + \sum_{k\leq j} m_{ik}d_{kj} = \cancel{\sum_{i>k} \underbrace{d_{ik}}_{0}m_{kj}} + \sum_{i\leq k} d_{ik}m_{kj}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sum_{k<j} m_{ik}\underbrace{d_{kj}}_{0}} + m_{ij}d_{jj} = \cancel{\sum_{i<k} \underbrace{d_{ik}}_{0}m_{kj}} + d_{ii}m_{ij} \quad (\forall i,j\in[1..n])$$

$$\Leftrightarrow m_{ij}d_{jj} = d_{ii}m_{ij} \quad \forall i,j\in[1..n]$$

$$\Leftrightarrow m_{ij}(d_{jj}-d_{ii}) = 0$$ pero $d_{jj}\neq d_{ii}$ ssi $i\neq j$

$\Leftrightarrow d_{jj}-d_{ii}\neq 0$

$\underset{i\neq j}{\Leftrightarrow} m_{ij}=0 \Leftrightarrow M$ es diagonal, mostrado lo pedido. ☒

c) $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $T(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ← suma de coef. en diag.

La idea será "afirmarse" de la definición de traza y utilizar las propiedades de sumatorias

Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, sea $\mu \in \mathbb{R}$

i) P.D.Q. $T(A+B) = T(A) + T(B)$

En efecto,

notación

separación $\sum$

$$T(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{i} = T(A) + T(B) \blacksquare$$

def. suma matricial (suma de términos)

def. $T(\cdot)$

ii) P.D.Q. $T(\mu A) = \mu T(A)$

En efecto,

factorizar en $\sum$

$$T(\mu A) = \sum_{i=1}^{n} (\mu A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \mu a_{ii} = \mu \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mu T(A) \blacksquare$$

def. matriz ponderada

def. $T(\cdot)$

iii) P.D.Q. $T(AB) = T(BA)$

En efecto,

$$T(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii}$$

def. producto matricial

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{ri} \right)$$

límites no tienen dependencia entonces se pueden intercambiar

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ir} B_{ri} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ri} A_{ir}$$

conmutatividad

def. producto matricial

$$= \sum_{r=1}^{n} (BA)_{rr} = T(BA) \blacksquare$$

def. $T(\cdot)$

d) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.q. conmutan. $\Leftrightarrow AB = BA$.

i) P.D.Q. $A^n B = B A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Potencias $\rightarrow$ Usar def. recursiva

En efecto,
sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Luego $A^n B = A^n A^{n-1} B$ ... def. potencias matriciales

$$= A^n A^{n-1} A^{n-2} B$$

$$= A^n A^{n-1} A^{n-2} \dots A B$$

$$= \underbrace{A A \dots A}_{n \text{ veces}} B$$

$$\left.\begin{aligned} &= A A \dots B A \\ &= A A B \dots A \\ &= A B A \dots A \\ &= B A A \dots A \end{aligned}\right\} \text{conmutatividad.}$$

$= B A^n$, mostrando lo pedido. $\boxtimes$

ii) P.D.Q. $(A^T B^T) = (B^T A^T)$ Traspuestas $\rightarrow$ Propiedades

En efecto,

$$(A^T B^T) \underset{\text{prop}}{=} (BA)^T \underset{\text{hipótesis}}{=} (AB)^T \underset{\text{prop}}{=} B^T A^T \quad \boxtimes$$

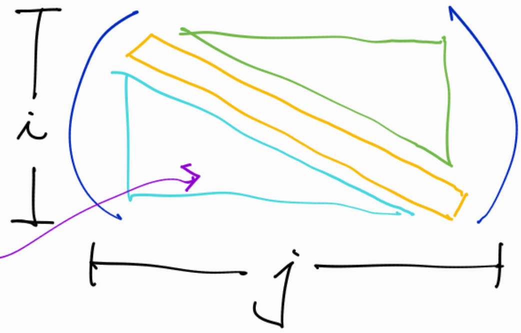
e) def.: A es triangular superior si $A_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$.

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices triangulares superior

i) P.D.Q. AB es triangular superior

Una matriz se puede visitar por ciertos lugares como:

en este problema habrá foco aquí



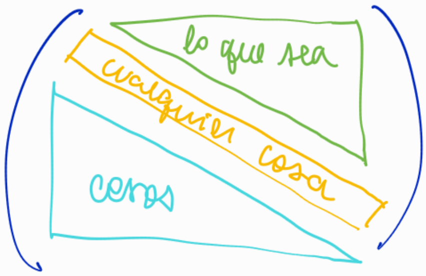
diagonal $i = j$

superior $i < j$

inferior $i > j$

hay que ver parte inferior para estudiar Δ-superior.

Las matrices triangular superior tienen todas las entradas nulas por debajo de la diagonal, así que lucen algo así:



Entonces hay que mostrar que las entradas de AB son nulas para la zona inferior i.e. $(AB)_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$, así que será de utilidad usar la def. del producto matricial, para trabajar el lado izquierdo, y es esperable usar la suposición $i > j$ en algún punto.

En efecto, sean $i, j \in [1..n]$ fijos t.q. $i>j$.

Luego $(AB)_{ij} \underset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ pero B es Δ-superior, así que $b_{kj} = 0 \ \forall k>j$

$$= \sum_{k \leq j} a_{ik} b_{kj} + \cancel{\sum_{k>j} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0}}^{\,0}$$

separar índices según interés

$$= \sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj} + \cancel{\sum_{k=j+1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0}}^{\,0}$$

escritura más cómoda

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{j} \underbrace{a_{ik}}_{0} b_{kj}}^{\,0}$$; pero $i>j$ y $k \leq j \Rightarrow k<i$

Luego como k está entre 1 y j, pero $j<i$, se tiene que $k<i$; ya que A es Δ-superior se cumple para los coeficientes que $a_{ik} = 0 \ \forall i>k$.

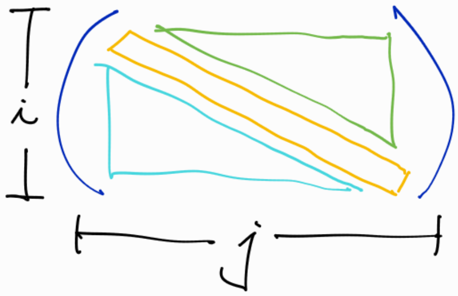
Así $(AB)_{ij} = 0$ para $i>j$.

Se concluye que $(AB)_{ij}$ es Δ-superior. ■

Moraleja: el producto entre Δ-superiores es cerrado.

ii) P.D.Q. $(AB)_{ii} = (BA)_{ii} \quad \forall i \leq n$ → producto en la diagonal conmuta

Ahora se va a visitar la diagonal, y se quiere estudiar el producto entre matrices, por lo que la definición de producto matricial será útil, así como las características que cumplen los coef. de A y B.



diagonal $i=j$

superior $i<j$

inferior $i>j$

En efecto,

Sea $i \in [1..n]$ arbitrario. Luego, por un lado:

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k \leq i} a_{ik} b_{ki} + \cancel{\sum_{k>i} a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{0}} \rightarrow 0$$

conjuntos de interés: $k>i \Rightarrow b_{ki}=0$

$$= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{ki} + \cancel{\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{0}} \rightarrow 0$$

escritura más cómoda

$$= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{ki}$$, pero si ocurre que $i>k \Rightarrow a_{ik}=0$,

A es Δ-superior

entonces conviene separar índices en $i>k$ y $i=k$

$$= \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{0} b_{ki}}}_{i>k} \rightarrow 0 + a_{ii} b_{ii}$$

$$= a_{ii} b_{ii}.$$

Por el otro lado:

$$(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k\leq i} b_{ik} a_{kj} + \cancel{\sum_{k>i} b_{ik} \underbrace{a_{kj}}_{0}} \to 0$$

conjunto de interés: $k>j \Rightarrow a_{kj}=0$

$$= \sum_{k=1}^{i} b_{ik} a_{kj} + \cancel{\sum_{k=i+1}^{n} b_{ik} \underbrace{a_{kj}}_{0}} \to 0$$

escritura más cómoda

B es Δ-sup

$$= \sum_{k=1}^{i} b_{ik} a_{kj}$$

, pero $i \geq k$ y si ocurre $i>k \Rightarrow b_{ik}=0$, entonces conviene estudiar $i>k$ y $i=k$.

$i>k$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{b_{ik}}_{0} a_{kj}} + b_{ii} a_{ii} \to 0$$

$$= b_{ii} a_{ii}.$$

Luego $(AB)_{ii} = \underbrace{a_{ii} b_{ii}}_{\text{producto en } \mathbb{R}} = b_{ii} a_{ii} = (BA)_{ii}.$

conmutatividad

Sigue que $(AB)_{ii} = (BA)_{ii} \; \forall i \leq n$, mostrando así lo pedido. ∎

f) $A, B, (A+B^{-1})$ invertibles

$\Rightarrow \exists\, A^{-1}, B^{-1}, (A+B)^{-1}$ t.q. $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

$BB^{-1} = I = B^{-1}B$

$(A+B^{-1})(A+B^{-1})^{-1} = I = (A+B^{-1})^{-1}(A+B^{-1})$

P.D.Q. $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1}$

La idea es operar adecuadamente y siempre justificar mediante la existencia de las inversas.

En efecto, se quiere ver que

$$[(A^{-1}+B)A]\underbrace{(A+B^{-1})^{-1}B^{-1}}_{\text{candidata a } (A^{-1}+B^{-1})^{-1}} = I$$

distributividad

$$\Leftrightarrow (A^{-1}A + BA)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = I$$

$A^{-1}A = I$ pues A invertible

$$\Leftrightarrow (I + BA)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = I$$

$I = BB^{-1}$ pues B invertible

$$\Leftrightarrow (BB^{-1}+BA)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = I$$

distributividad

$$\Leftrightarrow B(B^{-1}+A)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = I$$

conmutatividad

$$\Leftrightarrow B[(A+B^{-1})(A+B^{-1})^{-1}]B^{-1} = I$$

$$\Leftrightarrow B[IB^{-1}] = I$$

$(A+B^{-1})(A+B^{-1})^{-1} = I$ pues $A+B^{-1}$ invertible

$$\Leftrightarrow BB^{-1} = I \Leftrightarrow V$$

pues B es invertible ■

⚠ En la clase se hizo el desarrollo:

$$[(A^{-1}+B)A](A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = (A^{-1}A+BA)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = (I+BA)[B(A+B^{-1})]^{-1}$$

$$= (I+BA)(BA+BB^{-1})^{-1} = (I+BA)(BA+I)^{-1} = (I+BA)(I+BA)^{-1} = I$$

⚠

que sería válido si $(BA+I)$ fuese invertible por enunciado (pero no es así en este caso). Tómenlo como 2 ejercicios diferentes ☺

g) $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$; B invertible $B^5 - B = 0$.
Calcular B^{-1}

Potencias → Def. recursiva

Como $B^5 - B = 0$

distributividad

$\Leftrightarrow B(B^4 - I) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{B = 0}_{\text{no puede ocurrir pues } B \text{ es invertible pero matriz nula no es invertible}} \vee B^4 = I \Rightarrow B^4 = I \Leftrightarrow BB^3 = I$

$\underset{\uparrow}{\Rightarrow} B^{-1} = B^3$. ■

B invertible

h) $A = 1_{n\times n}$.

Hay que hallar $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $(I-A)^{-1} = I+\beta A$

O sea, la inversa de $(I-A)$ es $I+\beta A$:

$(I-A)(I+\beta A) = I$ distributividad

$\Rightarrow II + I\beta A - AI - A\beta A = I$ factorizar constantes

$\Leftrightarrow I + \beta IA - A - \beta AA = I$ aplicar identidad y escribir potencias

$\Leftrightarrow I + \beta A - A - \beta A^2 = I$ $/-I$

$\Leftrightarrow \beta A - A - \beta A^2 = 0$ reescribir

$\Leftrightarrow \beta(A - A^2) = A$

Notar que $A^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = nA$

$\Rightarrow \beta(A - nA) = A$ pues $nA = A^2$

$\Rightarrow \beta A - \beta nA = A$ distribuir

$\Rightarrow (\beta - \beta n)A = A$ factorizar

$\Rightarrow \beta - \beta n = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{1-n}$ $(n \neq 1$ pues $n > 1)$ $\blacksquare$

P_3

Primero es útil ver un ejemplo de matrices por bloques:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 29 & -5 & 10 & 28 \\ 34 & 29 & 9 & 18 \\ \hline 8 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

1º

11) $8+0+12+9=29$

12) $3+4+0-12=-5$

13) $0+6+4+0=10$

14) $4+4+8+12=28$

21) $40+0+0-6=34$

22) $15+6+0+8=29$

23) $0+9+0+0=9$

24) $20+6+0-8=18$

31) $8+0+0+0=8$

32) $0+3+0+0=3$

33) $0+0+0+0=0$

34) $0+0+0+4=4$

41) $0+0+0+0=0$

42) $0+2+0+0=2$

43) $0+3+0+0=3$

44) $0+2+0+0=2$

Al hacer la multiplicación usual se llega a un cierto resultado.

2º

Pero si se hace por bloques cuadrados, también se llega a lo mismo!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 40 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 29 & -5 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$$

Más en general, las matrices por bloques de las mismas dimensiones se multiplican y suman como es "esperable":

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right)$$

$A, B, C \in \mathcal{M}_{n,n}$, A, C invertibles $\Rightarrow \exists\, A^{-1}, C^{-1}$ t.q. $\begin{matrix} AA^{-1} = I = A^{-1}A \\ CC^{-1} = I = C^{-1}C \end{matrix}$

P.D.Q. $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ invertible t.q. $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 0 & Z \end{array}\right)$

(Hay que determinar X, Y, Z)

Recordando que $A, B, 0, C, X, Y, Z$ son matrices cuadradas por lo que las matrices del L.I. son matrices cuadradas. Entonces se puede visualizar como:

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc:cccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Donde el lado izquierdo se puede desarrollar como es "esperable":

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 0 & Z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AX + A0 & AY + BZ \\ \hline 0X + C0 & 0Y + CZ \end{array}\right) = \begin{pmatrix} AX & AY+BZ \\ 0 & CZ \end{pmatrix}$$

Luego, la igualdad se traduce a que

$$\left(\begin{array}{c|c} AX & AY+BZ \\ \hline 0 & CZ \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Y para que eso se satisfaga, las diagonales deben ser la identidad y el resto deben ser la matriz nula.

Así, se obtienen las condiciones
$$AX = I \quad (1)$$
$$CZ = I \quad (2)$$
$$AY + BZ = \mathbb{O} \quad (3)$$

Como A y C son invertibles, por (1) y (2), $X = A^{-1}$ y $Z = C^{-1}$.

En cuanto a (3), se debe satisfacer $AY + BZ = \mathbb{O}$, con $Z = C^{-1}$:
$$AY + BC^{-1} = \mathbb{O} \Rightarrow AY = -BC^{-1} \;/\; A^{-1}\cdot \quad (A \text{ invertible})$$
$$\Rightarrow Y = -A^{-1}BC^{-1}$$

Aplicando la teoría de grupos de Introducción al Álgebra,

las matrices cuadradas $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$ son un anillo (no conmutativo y con divisores de cero) [por lo que $(\mathbb{K}^{n\times n}, +)$ es un grupo abeliano] así que, en particular, admite un único neutro para $\cdot$ (la identidad) y si un elemento $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible, se tiene por ambos lados:
$$(\exists B \in \mathbb{K}^{n\times n}) : AB = I_n = BA \Rightarrow B = A^{-1}$$

Luego si se busca que $\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline \mathbb{O} & Z \end{array}\right)$ sea su inversa, también debe cumplir el producto en el otro sentido:
$$\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline \mathbb{O} & Z \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbb{O} & C \end{array}\right) = I$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} XA + Y\mathbb{O} & XB + YC \\ \hline \mathbb{O}A + Z\mathbb{O} & \mathbb{O}B + ZC \end{array}\right) = I$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} XA & XB + YC \\ \hline \mathbb{O} & ZC \end{array}\right) = I$$

Usando las mismas ideas previas, se tienen las condiciones

$$\left.\begin{array}{ll} XA = I & \text{I} \\ ZC = I & \text{II} \\ XB + YC = \mathbb{O} & \text{III} \end{array}\right\}$$

Pero A, C son invertibles $\Rightarrow X = A^{-1}, Z = C^{-1}$.

y $XB + YC = \mathbb{O}$, con $X = A^{-1}$

$\Leftrightarrow A^{-1}B + YC = \mathbb{O} \Rightarrow YC = -A^{-1}B \;/\cdot C^{-1}$ (C invert.)

$\Rightarrow Y = -A^{-1}BC^{-1}$ //

Obteniendo así las condiciones que se pedían determinar. ■

P4

def.: $P \in M_{n \times n}$; P es matriz de proyección si $P = P^2$

Hay que recordar que las potencias de una matriz se definen de manera recurrente:

$$A^0 = I, \ A^n = AA^{n-1} \ (\forall n \geq 1)$$

a) P.D.Q. P es matriz de proyección $\Rightarrow I-P$ es matriz de proyección

La idea es proceder por def. de matriz de proyección pues es lo que aporta información.

En efecto,

Supóngase que P es matriz de proyección $\overset{\text{def.}}{\Rightarrow} P = P^2$.

P.D.Q. $I-P$ es matriz de proyección

$\Leftrightarrow I-P = (I-P)^2$

Luego $(I-P)^2 = (I-P)(I-P)$ ... def. $(\ )^2$

$= II - IP - PI + (-P)(-P)$ ... distribución

$= II - IP - PI + (-1)(-1)PP$ ... factorización de escalares

$= II - IP - PI + PP$

$= I - P - P + PP$ ... I es neutro de multiplicación

$= I - 2P + P^2$ ... notación $PP = P^2$

$= I - 2P + P$ ... $P^2 = P$ pues P es de proyección

$= I - P$, mostrando lo pedido. ∎

b) P es invertible. P.D.Q. $P = I \wedge Q = 0$

Como P es invertible $\Rightarrow \exists\, B$ t.q. $BP = I = PB$, $B = P^{-1}$.

Pero $P^2 = P$

asociatividad

$$\Rightarrow P^{-1}P^2 = P^{-1}P \Leftrightarrow (P^{-1}P)P = P^{-1}P$$

$P^{-1}\cdot$

$$\Leftrightarrow IP = I \Leftrightarrow P = I.$$

$P^{-1}P = I$
(P invertible)

$$\bullet \Rightarrow Q = I - P$$
$$\Leftrightarrow Q = I - I = 0 \; \blacksquare$$

c) $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}$. P.D.Q. $P_1 = P_1P_2 \wedge P_2 = P_2P_1 \Rightarrow P_1, P_2$ son matrices de proyección

Nuevamente la idea es afirmarse de la definición!

En efecto,

Supóngase $P_1 = P_1P_2$, $P_2 = P_2P_1$.

P.D.Q. P_1 , P_2 son matrices de proyección

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P_1^2 = P_1 \quad \text{y} \quad P_2^2 = P_1.$$

Pero

$$\begin{aligned} P_1^2 &= P_1P_1 && \cdots \text{def. } (\,)^2 \\ &= (P_1P_2)P_1 && \cdots \text{hipótesis } P_1 = P_1P_2 \\ &= P_1(P_2P_1) && \cdots \text{asociatividad} \\ &= P_1P_2 && \cdots \text{hipótesis } P_2 = P_2P_1 \\ &= P_1 && \cdots \text{hipótesis } P_1P_2 = P_1 \quad // \end{aligned}$$

Con P_2 es análogo. (en un control recomiendo desarrollar pero ahora se los dejo jeje).

Luego, se muestra lo pedido. $\blacksquare$

d) P.D.Q. P es matriz de proyección ssi $P^2(I-P)=0 \wedge P(I-P)^2=0$

Nuevamente lo que más aporta es usar la definición!

En efecto,
por doble implicancia:

$\Rightarrow$) P es matriz de proyección
P.D.Q. $P^2(I-P)=0 \wedge P(I-P)^2=0$

Se estudiarán $P^2(I-P)$ y $P(I-P)^2$.

$$* \; P^2(I-P) \underset{\text{P es de proyección}}{=} P(I-P) \underset{\text{distribuir}}{=} PI-PP \underset{\substack{\cdot\, I \text{ neutro} \\ \cdot \text{ notación } ()^2}}{=} P-P^2 \underset{\text{P es de proyección}}{=} P-P=0 \,//$$

$$* \; P(I-P)^2 \underset{\text{desarrollo de parte anterior}}{=} P(I-2P+P^2) \underset{\text{distribuir}}{=} PI-P2P+PP^2 \underset{\substack{\cdot\, I \text{ neutro} \\ \cdot \text{ factorizar constantes}}}{=} P-2PP+PP^2$$

$$\underset{\substack{\cdot \text{ notación } ()^2 \\ \cdot\, P \text{ es de proyección}}}{=} P-2P^2+PP \underset{\substack{\cdot\, P \text{ es de proyección} \\ \cdot \text{ notación } ()^2}}{=} P-2P+P^2 \underset{\substack{\cdot \text{ restar} \\ \cdot\, P \text{ es de proyección}}}{=} -P+P \underset{\text{opuestos}}{=} 0 \,//$$

Luego se tiene la implicancia. //

$\Leftarrow)$ $P^2(I-P)=0 \wedge P(I-P)^2=0$

P.D.Q. P es matriz de proyección.

La idea es usar las hipótesis para llegar de algún modo a la condición de que $P^2=P$.

Notar que $P^2(I-P)=0$

$\Leftrightarrow P^2-P^3=0$ ... por desarrollo de parte anterior

$\Leftrightarrow P^2=P^3$ (1)

y $P(I-P)^2=0$

$\Leftrightarrow P(I-2P+P^2)=0$ ... desarrollo de parte anterior

$\Leftrightarrow P-2P^2+P^3=0$ ... distributividad

$\Leftrightarrow P^3=2P^2-P$ (2)

Pero $P^3=P^3 \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} P^2=2P^2-P$ $\quad /+P\,/-P^2$

$\Leftrightarrow P=2P^2-P^2$

$\Leftrightarrow P=P^2$

$\Leftrightarrow P$ es de proyección //

-o-

Así se muestra lo pedido. ∎

e) Encontrar $P \in M_{nn}(\mathbb{R}) : P \neq P^2 \wedge P^2(I-P) = 0$

En general salen buenos contraejemplos cuando se usan matrices con hartos ceros! y las entradas más "sencillas" de manejar son los unos.

Ej $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $P^2 = PP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow P^2 \neq P$

- $I - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $P^2(I-P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ //

P5

PROPUESTA //

Esto es solo el comienzo de Álgebra lineal!! Hay muchas más cosas que aprender

Ánimo con semana 3

Cualquier duda me avisan!

Recomendación de la semana: