DESARROLLO AUX 4

DESCOMPOSICIÓN LDU, CÁLCULO DE INVERSAS, SISTEMAS LINEALES Y ESPACIOS VECTORIALES

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

P1 $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1\end{pmatrix}$ P.D.Q. M invertible ssi $\mu^2 \neq 1$

Calcular su inversa.

La idea es utilizar el Método de Gauss que propone estudiar el sistema extendido $(A|I)$ con A la matriz que se busca invertir, y transformarlo mediante matrices elementales de modo que $(A|I) \to (I|B)$, así $A^{-1}=B$.

las "acciones" se van guardando en el lado derecho

1) Escalonar

*) ↳ justificar si es invertible.

→ se llega a Δ-superior

2) Pivotear con diagonal haciarriba

→ se llega a Δ-superior Δ-inferior diagonal

3) Multiplicar por diagonal t.q. haya coef. 1

→ se llega a identidad

Siguiendo el esquema descrito:

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{\mu} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$E_{p,q}(\beta)$: hace lo mismo que: $f_q \to f_q + \beta f_p$

$$\xrightarrow[f_3 \to \underbrace{f_3 - \mu f_1}]{1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu^2 & -\mu & 0 & 1 \end{array}\right)$$

pues $\mu - \mu \cdot 1 = 0$

Está escalonada. *) Por Teorema: $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible ssi $\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$

i.e. M es invertible ssi sus coeficientes en la diagonal son todos no nulos o sea ocurre ssi $1-\mu^2 \neq 0 \Leftrightarrow \mu^2 \neq 1$.

Lo anterior permite concluir lo pedido. Ahora hay que terminar de calcular la inversa, para $\mu^2 \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{\mu} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu^2 & -\mu & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2)

$$\xrightarrow[\underbrace{f_1 \to f_1 + \frac{-\mu}{1-\mu^2} f_3}_{\text{pues } \mu + \frac{-\mu}{1-\mu^2}(1-\mu^2) = 0}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1+\left(\frac{-\mu}{1-\mu^2}\right)(-\mu) & 0 & \frac{-\mu}{1-\mu^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu^2 & -\mu & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= 1 + \frac{\mu^2}{1-\mu^2} = \frac{1-\mu^2+\mu^2}{1-\mu^2} = \frac{1}{1-\mu^2}$$

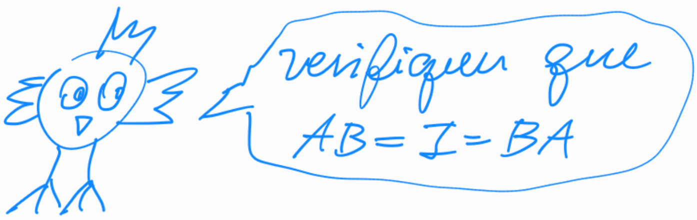
$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu}{\mu^2-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu^2 & -\mu & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3)

$$\xrightarrow[\underbrace{f_3 \to \frac{1}{1-\mu^2} f_3}_{\text{pues } \frac{1}{1-\mu^2}(1-\mu^2) = 1}]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} \end{pmatrix} \cdot} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu}{\mu^2-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-\mu}{1-\mu^2} & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} \end{array}\right)$$

$$\frac{-\mu}{1-\mu^2} = \frac{\mu}{\mu^2-1}$$

Luego, se llegó a la forma $(I \mid B)$. Por construcción, sigue que la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu}{\mu^2-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\mu}{1-\mu^2} & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} \end{pmatrix}$ es la inversa de A (ssi $\mu^2 \neq 1$) ☺



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mu^2} & 0 & \frac{\mu}{\mu^2-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\mu}{1-\mu^2} & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} \end{pmatrix} = C$$

$$C_{11} = \frac{1}{1-\mu^2} - \frac{\mu^2}{1-\mu^2} = \frac{1-\mu^2}{1-\mu^2} = 1$$

$$C_{12} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$C_{13} = \frac{\mu}{\mu^2-1} + \frac{\mu}{1-\mu^2} = 0$$

$$C_{21} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$C_{22} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$C_{23} = 0$$

$$C_{31} = \frac{\mu}{1-\mu^2} + \frac{-\mu}{1-\mu^2} = 0$$

$$C_{32} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$C_{33} = \frac{\mu^2}{\mu^2-1} + \frac{1}{1-\mu^2} = \frac{-\mu^2}{1-\mu^2} + \frac{1}{1-\mu^2} = \frac{-\mu^2+1}{1-\mu^2} = 1$$

P_2

P2) Determinar descomposición LDU de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$

La idea de la descomposición LDU es poder reescribir una matriz cuadrada T como el producto de 3 matrices: $T = L D U$, con $\begin{cases} L \equiv \Delta\text{-inferior} \\ D \equiv \text{diagonal} \\ U \equiv \Delta\text{-superior} \end{cases}$

$\underset{\text{Lower}-\Delta}{L}\ \underset{\text{Diagonal}}{D}\ \underset{\text{Upper}-\Delta}{U}$

La motivación de esto es "capturar" en estas matrices las acciones que se realizan a la matriz. Esta descomposición tiene diversas aplicaciones y será particularmente útil al final del curso cuando se estudian formas cuadráticas.

La idea es 1) escalonar matriz
↳ info. queda en $E_{p,q}(\beta)$ → está escalonada

1) $A \rightsquigarrow \prod_j E_j A = \tilde{A}$

2) $= DU$

3) $\Rightarrow A = \left(\prod_j E_j\right)^{-1} DU$

4) $=: LDU$

2) expresarla como Diagonal · Δ-superior (hay que entrenar pero se logra!)

3) Recuperar expresión original.

4) Obtener descomposición.

Se aplicará esta idea a la matriz del enunciado:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ \boxed{1} & -9 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-9} & -4 \end{pmatrix}$$

$E_{p,q}(\beta)$: hace lo mismo que: $f_q \to f_q + \beta f_p$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 + 3f_2]{E_{2,3}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

Aquí aconsejo primero escribir la diagonal y según eso construir U

2) $$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Luego $\tilde{A} = E_{2,3}(3)\, E_{1,3}(-1)\, A$

$\iff DU = E_{2,3}(3) E_{1,3}(-1) A \quad / E_{2,3}(3)^{-1} \cdot \; / E_{1,3}(-1)^{-1} \cdot$ (son invertibles)

$$\Rightarrow \underbrace{E_{1,3}(-1)^{-1}\, E_{2,3}(3)^{-1}}_{=:L}\, DU = A$$

con $E_{1,3}(-1)^{-1} = E_{1,3}(1)$, $E_{2,3}(3)^{-1} = E_{2,3}(-3)$

$$\Rightarrow E_{1,3}(-1)^{-1}\, E_{2,3}(3)^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{1,3}(1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,3}(-3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{p,q}(\beta)$ es I con entrada β en (q,p) $(p<q)$

Sigue que $$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

P_3

(P3) Estudiar para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el sistema lineal

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 1 \\ x + 3y + z + (3-\alpha)w = \alpha \\ x + z + (\alpha+5)w = \beta \\ x + 3y + 2z + 3w = 2\alpha + 4 \end{cases}$$

Se seguirá el procedimiento usual:

1) Transformarlo a escritura matricial
   1.1) ↳ Determinar matriz extendida

2) Escalonar matriz de coeficientes

3) Ver cuándo hay unicidad de solución
   ↳ usar Teorema $Ax=b$ tiene única sol. $(\forall b \in \mathbb{R}^n)$ ssi $\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$
   (revisar que no hayan ceros en diagonal de escalonada)

4) Ver cuándo hay ∞ o $\emptyset$ soluciones
   (en casos complementarios a los anteriores)

[Siempre se trata de estudiar existencia y cantidad de sol.]

1) En su forma matricial, se identifica al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & (3-\alpha) \\ 1 & 0 & 1 & (\alpha+5) \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \\ 2\alpha+4 \end{pmatrix}$$

1.1) La matriz asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & (3-\alpha) & \alpha \\ \boxed{1} & 0 & 1 & (\alpha+5) & \beta \\ \boxed{1} & 3 & 2 & 3 & 2\alpha+4 \end{array}\right)$$

2) Ahora se va a escalonar.

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1 \\ f_4 \to f_4 - f_1}]{E_{1,2}(-1),\, E_{1,3}(-1),\, E_{1,4}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha+1 \\ 0 & \boxed{-7} & 0 & \alpha+2 & \beta-1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 2\alpha+3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 + 2f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_2}]{E_{2,3}(2),\, E_{4,2}(-7)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+2 & \beta-1+2(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \end{array}\right) \longrightarrow = \beta-3+2\alpha$$

$$\xrightarrow[f_4 \rightleftarrows f_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+2 & \beta-3+2\alpha \end{array}\right)$$

Ya está escalonada :)

3) Ahora hay que analizar los casos de soluciones.

Por teorema ya enunciado, el sistema tendrá solución única si es que la diagonal no tiene ceros, así que esto ocurre ssi $-\alpha+2 \neq 0 \iff \alpha \neq 2$

4) Ahora se verá los casos complementarios.

si $\alpha = 2$ (complemento de $\alpha \neq 2$), el sistema es

$* \Rightarrow 2\alpha = 4$

$\Rightarrow -3 + 2\alpha = 1$

$* \Rightarrow \alpha - 1 = 1$

$* \Rightarrow \alpha + 4 = 6$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

variable "libre" ← indep. del valor que tome, se tiene sol. y el resto de variables se puede escribir en sus términos

La fila 4 dice: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w = \beta + 1$.

* Esto es compatible/consistente si la igualdad es cierta, o sea si $\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$.

En este caso:

3: $z + 2w = 6$

$\Rightarrow z = 6 - 2w$ (1)'

2: $y - 2w = 1$

$\Rightarrow y = 1 + 2w$ (2)'

1: $x + 2y + z + 3w = 1$

$\Rightarrow x = -2y - z - 3w + 1$

$\overset{(1)',(2)'}{\Rightarrow} x = -2 - 4w - 6 + 2w - 3w + 1$

$= -7 - 5w$

Luego $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-5w \\ 1+2w \\ 6-2w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, w \in \mathbb{R} \right\}$ es conjunto solución, de ∞ soluciones.

* Es incompatible/inconsistente si la igualdad es falsa, o sea si $\beta + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -1$.

En resumen:

* Solución única: $\alpha \neq 2$

* compatible / ∞ soluciones: $\alpha = 2 \wedge \beta = -1$

* incompatible: $\alpha = 2 \wedge \beta \neq -1$

—o—

Cuando $\alpha = 1 = \beta$, el sistema queda en:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+2 & \beta-3+2\alpha \end{array}\right)\Bigg|_{\alpha=1=\beta} = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{es invertible pues no tiene ceros en la diagonal.}} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

4 : $\boxed{w=0}$ 4'

3 : $z+w=5 \Rightarrow z=5-w \underset{4'}{\Rightarrow} \boxed{z=5}$

2 : $y-w=0 \Rightarrow y=0+w \underset{4'}{\Rightarrow} \boxed{y=0}$

1 : $x+2y+z+3w=1 \Rightarrow x=1-3w-z-2y$

$\underset{4',3',2'}{\Rightarrow} x=1-5$

$\Rightarrow \boxed{x=-4}$

Luego la solución única es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ //

La inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & -9 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Checar que en este caso se puede hacer

$$Ax=b \underset{A^{-1}\cdot}{\Rightarrow} x=A^{-1}b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \\ 2\alpha+4 \end{pmatrix}\Bigg|_{\alpha=1=\beta}}_{\text{lado derecho del sistema}}$$

verificar !! :)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1 \\ f_4 \to f_4 - f_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \boxed{2} & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 + 2f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_2}]{} \xrightarrow[f_1 \to f_1 - 2f_2]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \rightleftarrows f_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1 \to f_1 - f_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 - f_4 \\ f_2 \to f_2 + f_4 \\ f_1 \to f_1 - 4f_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 & -9 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore \begin{pmatrix} 15 & -9 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. //

P_4

Sea $(V, +_V)$ grupo abeliano.

Sea $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ un cuerpo.

Sea $*$ ley de composición externa $\begin{cases} * : \mathbb{K} \times V \to V \\ (\beta, v) \mapsto \beta * v \end{cases}$

Luego $(V, +_V)$ es $\mathbb{K}$-espacio vectorial ssi

$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall u, v \in V)$:

I) $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) * v = \alpha * v +_V \beta * v$ → distributividad c/r suma $\mathbb{K}$

II) $\alpha * (u +_V v) = \alpha * u +_V \alpha * v$ → distributividad c/r suma en V

III) $\alpha * (\beta * v) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) * v$

IV) $1_{\mathbb{K}_{\mathbb{K}}} * v = v$

P4 a) E $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

$\oplus$ es t.q. $(\forall (u,v),(u',v') \in E^2): (u,v) \oplus (u',v') = (u+u', v+v')$

$$\begin{cases} \oplus : E^2 \times E^2 \to E^2 \\ ((u,v),(u',v')) \mapsto (u,v) \oplus (u',v') = (u+u', v+v') \end{cases}$$

← ley de composición interna de grupo abeliano

$\odot$ es t.q. $(\forall \beta \in \mathbb{K})(\forall (u,v) \in E^2): \beta \odot (u,v) = (\beta \cdot u, \beta \cdot v)$

$$\begin{cases} \odot : \mathbb{K} \times E^2 \to E^2 \\ (\beta,(u,v)) \mapsto \beta \odot (u,v) = (\beta u, \beta v) \end{cases}$$

← ley de composición externa de espacio vect.

P.D.Q. $(E^2, +, \cdot)$ es $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Hay que ver que

i) $(E^2, \oplus)$ es grupo abeliano.

I) $\oplus$ conmuta

II) $\oplus$ asocia

III) $\oplus$ admite neutro

IV) $\oplus$ admite inverso

ii) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo ← se tiene por enunciado. :)

iii) Se cumplen los axiomas de espacios vectoriales:

$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall (u,v),(u',v') \in E^2)$:

I) $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \odot (u,v) = \alpha \odot (u,v) \oplus \beta \odot (u,v)$

II) $\alpha \odot [(u,v) \oplus (u',v')] = \alpha \odot (u,v) \oplus \alpha \odot (u',v')$

III) $(\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \odot (u,v) = \alpha \odot [\beta \odot (u,v)]$

IV) $1_{\mathbb{K}\cdot_{\mathbb{K}}} \odot (u,v) = (u,v)$

i) $(E^2, \oplus)$ es grupo abeliano

I) $\oplus$ conmuta

Sean $(u,v), (u',v') \in E^2$ arbitrarios.

P.D.Q. $(u,v) \oplus (u',v') = (u',v') \oplus (u,v)$

En efecto,

$$(u,v) \oplus (u',v') \underset{\text{def. } \oplus}{=} (u+u', v+v') \underset{\substack{\text{conmutatividad} \\ \text{del grupo abeliano } (E,+)}}{=} (u'+u, v'+v) = (u',v') \oplus (u,v) //$$

Por transitividad de la igualdad se verifica que $(u,v) \oplus (u',v') = (u',v') \oplus (u,v)$ i.e. $\oplus$ conmuta.

II) $\oplus$ asocia

Sean $(u,v), (s,t), (w,r) \in E^2$ arbitrarios.

P.D.Q. $\big((u,v) \oplus (s,t)\big) \oplus (w,r) = (u,v) \oplus \big((s,t) \oplus (w,r)\big)$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\big((u,v) \oplus (s,t)\big) \oplus (w,r) &= (u+s, v+t) \oplus (w,r) && \text{... def. } \oplus \\
&= \big((u+s)+w, (v+t)+r\big) && \text{... def. } \oplus \\
&= \big(u+(s+w), v+(t+r)\big) && \text{... asociatividad de } (E,+) \\
&= (u,v) \oplus (s+w, t+r) && \text{... def. } \oplus \\
&= (u,v) \oplus \big((s,t) \oplus (w,r)\big) // && \text{... def. } \oplus
\end{aligned}$$

Por transitividad de la igualdad se verifica que $\oplus$ asocia. //

III) $\oplus$ admite elemento neutro

Se quiere ver que $\exists\,(e_1,e_2)$ t.q. $(u,v)\oplus(e_1,e_2)=(u,v)$.

Intuitivamente, se propone $(e_1,e_2)=(0,0)$.

Sea $(u,v)\in E^2$ arbitrario.

Notar que
$$
\begin{aligned}
(u,v)\oplus(0,0) &\overset{\text{def. }\oplus}{=} (u+0,\,v+0) \overset{\text{def. }\oplus}{=} (u,v)\\
&\overset{\text{conmutatividad de }(E,+)}{=} (0+u,\,0+v)\\
&\overset{\text{def. }\oplus}{=} (0,0)\oplus(u,v) \;//
\end{aligned}
$$

Sigue que $(0,0)$ es elemento neutro. //

IV) $\oplus$ admite inverso

Se quiere ver que $\exists\,(\tilde{u},\tilde{v})$ t.q. $(u,v)\oplus(\tilde{u},\tilde{v})=(0,0)$

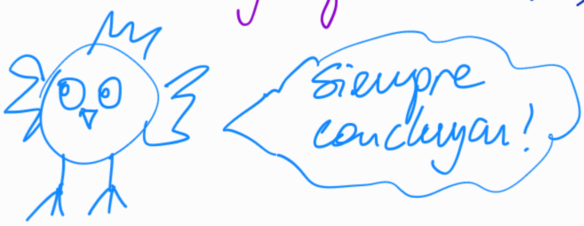
Intuitivamente, se propone $(\tilde{u},\tilde{v})=(-u,-v)$.

Sea $(u,v)\in E^2$ arbitrario.

Notar que
$$
\begin{aligned}
(u,v)\oplus(-u,-v) &= (u+(-u),\,v+(-v)) \overset{\text{inversos en cuerpo}}{=} (0,0)\\
&\overset{\text{conmutatividad de }(E,+)}{=} ((-u)+u,\,(-v)+v)\\
&\overset{\text{def. }\oplus}{=} (-u,-v)\oplus(u,v) \;//
\end{aligned}
$$

Sigue que $(-u,-v)$ es elemento inverso de (u,v). //

En virtud de i), I), II), III), IV) se concluye que $(E^2,\oplus)$ es un grupo abeliano. //



iii) Se cumplen los axiomas de espacios vectoriales.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(u,v),(u',v') \in E^2$ arbitrarios.

I) $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \odot (u,v) = \alpha \odot (u,v) \oplus \beta \odot (u,v)$

En efecto,

$$(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \odot (u,v) = \big((\alpha +_{\mathbb{K}} \beta)\cdot u, (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta)\cdot v\big) \quad \text{... def. } \odot$$

$$= (\alpha\cdot u + \beta\cdot u, \alpha\cdot v + \beta\cdot v) \quad \text{... distributividad c/r a suma de cuerpo en E.e.v.}$$

$$= (\alpha\cdot u, \alpha\cdot v) \oplus (\beta\cdot u, \beta\cdot v) \quad \text{... def. } \oplus$$

$$= \alpha \odot (u,v) \oplus \beta \odot (u,v) /\!/ \quad \text{... def. } \odot$$

II) $\alpha \odot \big((u,v) \oplus (u',v')\big) = \alpha \odot (u,v) \oplus \alpha \odot (u',v')$

En efecto,

$$\alpha \odot \big((u,v) \oplus (u',v')\big) = \alpha \odot (u+u', v+v') \quad \text{... def. } \oplus$$

$$= \big(\alpha\cdot(u+u'), \alpha\cdot(v+v')\big) \quad \text{... def. } \odot$$

$$= (\alpha\cdot u + \alpha\cdot u', \alpha\cdot v + \alpha\cdot v') \quad \text{... distributividad de suma l.c.i. en e.v.}$$

$$= (\alpha\cdot u, \alpha\cdot v) \oplus (\alpha\cdot u', \alpha\cdot v') \quad \text{... def. } \oplus$$

$$= \alpha \odot (u,v) \oplus \alpha \odot (u',v') /\!/ \quad \text{... def. } \odot$$

III) $\alpha \odot (\beta \odot (u,v)) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \odot (u,v)$

En efecto,

$$\alpha \odot (\beta \odot (u,v)) = \alpha \odot (\beta \cdot u, \beta \cdot v) \quad \ldots \text{def. } \odot$$

$$= (\alpha \cdot (\beta \cdot u), \alpha \cdot (\beta \cdot v)) \quad \ldots \text{def. } \odot$$

$$= ((\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \cdot u, (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \cdot v) \quad \ldots \text{asociatividad de escalares en e.v. } E$$

$$= \alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta \odot (u,v) \quad \ldots \text{def. } \odot \quad //$$

IV) $1_{\mathbb{K} \cdot \mathbb{K}} \odot (u,v) = (u,v)$

En efecto,

$$1_{\mathbb{K} \cdot \mathbb{K}} \odot (u,v) = (1_{\mathbb{K} \cdot \mathbb{K}} \cdot u, 1_{\mathbb{K} \cdot \mathbb{K}} \cdot v) \underset{\substack{1_{\mathbb{K} \cdot \mathbb{K}} \text{ es neutro} \\ \text{y } E \text{ es } \mathbb{K}\text{-e.v.}}}{=} (u,v) \quad //$$

En virtud de iii) I), II), III), IV) se concluye que se satisfacen los axiomas de espacio vectorial para $E^2, \oplus, \odot$.

— o —

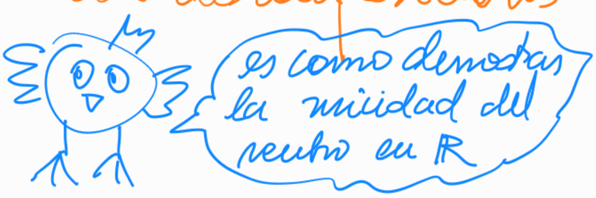
En virtud de i), ii), iii) se concluye que E^2 es $\mathbb{K}$-espacio vectorial. ☒

Como vieron, hay muchas cosas que probar... por eso aparecen los subespacios vectoriales que estudiaremos en el sgte. aux!

P5

P5 a) P.D.Q. descomposición LDU es única

Formalmente, esto se puede demostrar tomando una matriz arbitraria, asumir que tiene dos descomposiciones LDU, distintas y ver que deben ser iguales.



Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ t.q. admite dos descomposiciones LDU distintas $L_1 D_1 U_1$ y $L_2 D_2 U_2$ con: $(i \in \{1,2\})$

* L_i Δ-inferior con $\underline{1 \text{ en diagonal}}$ $\Rightarrow \neq 0$ i.e. invertible e inversa es Δ-inferior
* D_i diagonal invertible
* U_i Δ-superior con $\underline{1 \text{ en diagonal}}$ $\Rightarrow \neq 0$ i.e. invertible e inversa es Δ-superior

O sea que $\quad L_1 D_1 U_1 = A = L_2 D_2 U_2 \quad / L_2^{-1} \cdot$

$$\Rightarrow L_2^{-1} L_1 D_1 U_1 = D_2 U_2 \quad / \cdot U_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{L_2^{-1} L_1}_{\Delta\text{-inf.}} D_1 = D_2 \underbrace{U_2 U_1^{-1}}_{\Delta\text{-sup.}}$$

Pero $L_2^{-1} L_1$ es producto de Δ-inferiores con 1 en diagonal, sigue que $L_2^{-1} L_1$ es Δ-inferior con 1 en diagonal. Luego $(L_2^{-1} L_1) D_1$ es Δ-inferior (coef. de diagonal amplifican la columna respectiva a cada fila). De manera análoga, $D_2 (U_2 U_1^{-1})$ es Δ-superior.

Como son iguales y son Δ-superior y Δ-inferior simultáneamente, entonces deben ser diagonales.

i.e. $\quad L_2^{-1} L_1 D_1 = D = D_2 U_2 U_1^{-1}$, alguna D diagonal.

$$\Rightarrow L_2^{-1} L_1 = D D_1^{-1} \quad \wedge \quad U_2 U_1^{-1} = D_2^{-1} D.$$

Como $(L_2^{-1}L_1)$ tiene entradas 1 en la diagonal, entonces $(L_2^{-1}L_1)D_1$ tiene la misma diagonal de D_1, Análogo para el otro caso, $D_2(U_2U_1^{-1})$ tiene la diagonal de D_2.

De esto sigue que $D_1 = D_2$ ⚠

Más aún, como DD_1 es producto de diagonales $\Rightarrow$ es diagonal. Y si una matriz Δ-inferior (superior) de entradas 1 en la diagonal es igual a una diagonal, significa que dicha matriz es en realidad la identidad:

$$L_2^{-1}L_1 = I \quad \wedge \quad U_2U_1^{-1} = I$$

$$\Rightarrow (L_2^{-1})^{-1} = L_1 \quad \wedge \quad (U_1^{-1})^{-1} = U_2$$

$$\Rightarrow L_2 = L_1 \quad \wedge \quad U_1 = U_2$$

pues U_i, L_i son invertibles ($i \in \{1,2\}$).

Pero se asumió $L_1 \neq L_2$, $D_1 \neq D_2$, $U_1 \neq U_2$, así que como se llegó a un absurdo, lo supuesto es falso y su negación es verdadera: la descomposición LDU es única. ∎

P5 b) P.D.Q. $\left.\begin{array}{l} A \text{ admite descomposición } LDU \\ A \text{ simétrica} \end{array}\right\} \Rightarrow L = U^T$

¡Lo que más aporta información es la definición!

A admite descomposición LDU $\Rightarrow A = LDU$ t.q.

* L es Δ-inferior con 1 en diagonal
* D es diagonal invertible
* U es Δ-superior con 1 en diagonal

Como A es simétrica: $A = A^T$

Luego $\quad LDU = (LDU)^T$

$$\Leftrightarrow LDU = U^T D^T L^T \quad ; \quad D^T = D \text{ pues } D \text{ es diagonal}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{LDU}_{A} = U^T D L^T$$

Pero A admite descomposición única:

$$\Rightarrow L = U^T \wedge U = L^T \quad \blacksquare$$

Recuerden que me pueden comentar cualquier duda que les aparezca :)

Éxito en su estudio!!!
Ustedes pueden :)

Recomendación