# Resumen C1

**Profesor:** Pablo R. Dartnell R.
**Auxiliar:** Bianca Zamora Araya

En el presente documento se tienen los principales resultados que deben manejar para el primer control del curso. Recuerden que no solo importa conocer las definiciones, propiedades y teoremas, sino que también es necesario comprenderlas en profundidad y saber cómo aplicarlas. Confíen en sus conocimientos y éxito en su estudio (:

## Matrices y sus propiedades

- **[Matriz]:** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ es una tabla de doble entrada con $m$ filas y $n$ columnas, representada por $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ donde cada coeficiente o entrada $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($\forall i, j \in [1..n]$) donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dos matrices son iguales si y solo si coinciden en dimensión y entradas.

- **[Estructuras de matrices y operatoria]:** $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), +)$ tiene estructura de grupo abeliano, con la matriz nula como neutro aditivo e inverso aditivo definido como la matriz de valores opuestos. $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo no conmutativo y con divisores de cero, de unidad igual a la matriz identidad; no todos los elementos tienen inverso multiplicativo, pero en caso de que exista, se tiene unicidad. Se cumple la asociatividad, distributividad por ambos lados y factorización de escalares:
  - $A(BC) = (AB)C$
  - $A(B + \mu C) = AB + \mu AC$

  definidas respectivamente para $A, B, C$ matrices t.q. sus operaciones tienen sentido y $\mu$ un escalar.

- **[Producto matricial]:** Sean $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$, entonces el producto $AB = C$ se define en $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ y sus coeficientes se definen por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$ $\forall (i, j) \in [1..m] \times [1..n]$. Notar que la multiplicación de matrices no conmuta.

- **[Matriz traspuesta]:** $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ denota a la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, que intercambia sus filas por columnas i.e. $a_{ij}^T = a_{ji}$ $\forall (i, j) \in [1..n] \times [1..m]$ (la primera fila de $A^T$ es la primera columna de $A$ y así sucesivamente).
  - $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{rm}(\mathbb{K})$: $\left(A^T\right)^T = A$ y $(BC)^T = C^T B^T$.

- **[Definición de algunas matrices cuadradas]:** $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dice **triangular superior** si sus coeficientes son nulos por debajo de la diagonal ($a_{ij} = 0 \ \forall i > j$); se dice **triangular inferior** si sus coeficientes son nulos por sobre la diagonal ($a_{ij} = 0 \ \forall i < j$); se dice **diagonal** si es triangular superior e inferior simultáneamente i.e. solo tiene coeficientes en diagonal ($a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$); se dice **simétrica** si verifica $A = A^T$ equivalente a $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j \in [1..n]$; se dice **identidad** si es diagonal y cada una de sus entradas no nulas es igual a 1 ($a_{ij} = 1 \ \forall i = j$), y es el neutro multiplicativo.
  - $D^T = D$ si $D$ es diagonal.
  - Si $A$ es diagonal con $a_{ii} \neq 0 \ \forall i \leq n$, entonces es invertible y su inversa también es diagonal con $\left(A^{-1}\right)_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}} \ \forall i \leq n$.
  - Producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior).
  - Para $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertibles, entonces:
    - $\left(A^{-1}\right)$ es invertible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
    - $AB$ es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
    - $\forall n \geq 0$ $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$.
    - $A^T$ es invertible y $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

- **[Potencias de una matriz]:** Para $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$ se definen sus potencias de manera recursiva con $A^0 = I$ y $A^n = AA^{n-1}$ $\forall n \geq 1$.

## Sistemas lineales, matrices elementales y criterios de invertibilidad

- **[Definición de algunas matrices cuadradas]:** $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dice **triangular superior** si sus coeficientes son nulos por debajo de la diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i > j$); se dice **triangular inferior** si sus coeficientes son nulos por sobre la diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i < j$); se dice **diagonal** si es triangular superior e inferior simultáneamente i.e. solo tiene coeficientes en diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$); se dice **simétrica** si verifica $A = A^T$ equivalente a $a_{ij} = a_{ji}\ \ \forall i, j \in [1..n]$; se dice **identidad** si es diagonal y cada una de sus entradas no nulas es igual a 1 ($a_{ij} = 1\ \forall i = j$), y es el neutro multiplicativo.
- **[Matriz elemental de permutación]:** Para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $p, q \leq n$ se define la matriz $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ como la matriz identidad de $n \times n$ luego de que se le permutaran las filas $p$ y $q$. Por esto $I_{pq}$ solo tiene entradas uno en la diagonal, salvo por las filas $p$ y $q$: el 1 de la fila $p$ está en la columna $q$, y el 1 de la fila $q$ está en la columna $p$.

  $I_{pq}$ es invertible y $(I_{pq})^{-1} = I_{pq}$.

  Con lo anterior, para $A, B$ matrices con dimensiones para que el producto esté bien definido: $I_{pq}A$ resulta en la matriz $A$ con las filas $p$ y $q$ permutadas, y $BI_{pq}$ resulta en la matriz $B$ con las columnas $p$ y $q$ permutadas.
- **[Matriz elemental de suma]:** Para $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ fijos, y $p, q \leq n$ tal que $p < q$, se define la matriz $E_{pq}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz identidad de $n \times n$ de entrada $\lambda$ en la posición $(q, p)$.

  $E_{pq}(\lambda)$ es invertible y $(E_{pq}(\lambda))^{-1} = E_{pq}(-\lambda)$.

  Con lo anterior, para $A, B$ matrices con dimensiones para que el producto esté bien definido: $E_{pq}(\lambda)A$ resulta en la matriz A tal que a la fila $q$ se le sumó la fila $p$ ponderada por $\lambda$, y $BE_{pq}(\lambda)$ resulta en la matriz B tal que a la columna $p$ se le sumó la columna $q$ ponderada por $\lambda$.
- Un sistema con $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- **[Matriz escalonada]:** Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, la matriz escalonada asociada a la matriz $A$ se define por $\tilde{A}$ y es tal que en cada columna existe un índice que barre por las filas tal que, a partir de dicho índice, solo hay ceros como entradas en la columna (o bien, que antes de dicho índice, hay entradas no nulas en la columna); este índice va aumentado en la medida que se barre por las columnas. Esto provoca se visualice una forma de "escalones" en la matriz. Esta matriz $\tilde{A}$ se obtiene mediante la premultiplicación de $A$ por matrices elementales (de suma o de permutación de filas): $\tilde{A} = \left(\prod_j Q_j\right) A$. Las entradas de cada columna en tales que arriba las entradas son no nulas y abajo son nulas se llaman **pivotes**.
- **[Sistemas equivalentes]:** Dada una matriz $C$ invertible, entonces: $a \in \mathbb{K}^n$es solución de$Ax = b \iff a$es solución de $(CA)\,x = Cb$. Esto permite concluir que los sistemas $Ax = b$ y $\tilde{A}x = \tilde{b}$.
- **[Teorema que caracteriza unicidad e invertibilidad de un sistema matricial cuadrado]:** Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Entonces las siguientes son equivalentes $A$ es invertible, $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$ y $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \in \mathbb{K}^n$.

## Espacios vectoriales, subespacios vectoriales, independencia lineal, generadores y bases

- **[Caracterización de espacio vectorial]:** Sean $(V, +_V)$ un grupo abeliano, $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ un cuerpo, $*_V : \mathbb{K} \times V \to V$ ley de composición externa tal que $(\forall\, (\beta, v) \in \mathbb{K} \times V) : \beta * v \in V$. Luego $(V, +_V, *_V)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (también dicho $\mathbb{K}$-espacio vectorial) si y solo si $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K})\, (\forall\, u, v \in V)$ se cumple que:
  - **i)** $(a +_{\mathbb{K}} \beta) *_V v = \alpha *_V v \ +_V \ \beta *_V v$
  - **ii)** $\alpha *_V (u +_V v) = \alpha *_V u \ +_V \ \alpha *_V v$
  - **iii)** $\alpha *_V (\beta *_V V) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) *_V v$
  - **iv)** $1_{\mathbb{K} \cdot_{\mathbb{K}}} *_V v = v$
- **[Subespacio vectorial]:** Sea un espacio vectorial $V$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que $U$ es subespacio vectorial de $V$ si y solo si se cumple:
  - **i)** $U \neq \emptyset$
  - **ii)** $U \subset V$
  - **iii)** $(\forall u, v \in U) : u + v \in U$
  - **iv)** $(\forall \beta \in \mathbb{K})\, (\forall u \in U) : \beta u \in U$
- **[Intersección de subespacios vectoriales]:** Sea $E$ un espacio vectorial definido sobre algún cuerpo. Sean $U, V$ subespacios vectoriales de $E$, entonces $U \cap V$ es subespacio vectorial de $E$.
- **[Caracterización de subespacios vectoriales]:** Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces $U$ es subespacio vectorial de $V$ si y solo si $(\forall u, v \in U)\, (\forall \beta \in \mathbb{K}) : u + \beta v \in U$.
- **[Combinación lineal]:** Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ una colección de vectores y $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ una colección de escalares. El vector $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \in V$ se denomina combinación lineal.
- **[Ser combinación lineal]:** Un vector $u \in V$ se dice combinación lineal de los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ si y solo si existen $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tales que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \in V$.
- **[Subespacio vectorial generado por un conjunto]:** El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, también denominado el conjunto generado por dichos vectores, se define por:
$$\langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i, \beta_i \in \mathbb{K} \right\}$$
  - $\langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle$ es el subespacio vectorial de $V$ más pequeño que contiene a los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$.
- **[Independencia lineal]**: Sean $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$. Los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ son **linealmente independientes** si y solo si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0 \implies \beta_i = 0, \forall i \in [1..n]$. De lo contrario, se dirán **linealmente dependientes**.
- **[Conjunto generador]**: Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ generan $V$ si y solo si $\langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle = V$, es decir, $(\forall v \in V)\, (\exists \{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}) : v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$.
- **[Base]**: Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. El conjunto de vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ se dice base de $V$ si y solo si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto linealmente independiente y genera a todo el espacio $V = \langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle$.
- **[Dimensión]**: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $n \in \mathbb{N}$. Su dimensión es $n$ (finita) ssi admite una base de cardinalidad $n$; en caso de que no exista una base finita, se dirá que tiene dimensión infinita. Si $U$ es s.e.v. de $V$ entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$. Si $\dim(U) = \dim(V)$ entonces $U = V$.
- **[Convención]**: El conjunto vacío es linealmente independiente y $\{0\}$ es el subespacio más pequeño que lo contiene, por lo que el conjunto vacío es la base del espacio vectorial $\{0\}$. Se tiene que $\dim(\{0\}) = 0$.
- **[Obtener bases]**: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
  - De un conjunto generador de $V$, siempre es posible extraer un subcojunto que sea base de $V$.
  - Si se tiene una base de tamaño $n$ y conjunto cualquiera de tamaño $k$ tal que $k > n$, entonces el conjunto es linealmente dependiente (pueden extraerse vectores hasta obtener una base de $V$).
  - Si la dimensión de $V$ es $n < \infty$ y se tiene un conjunto linealmente independiente de $n$ elementos, entonces dicho conjunto es base de $V$.
  - Si la dimensión de $V$ es $n < \infty$ y se tiene un conjunto linealmente independiente de $k$ elementos con $k < n$, entonces existen $n - k$ vectores que agregar al l.i. para que sea base de $V$.