Auxiliar 7

Suma de espacios vectoriales

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 30 de septiembre de 2024

P1. [Suplementos]
Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $U \subseteq V$ un subespacio vectorial de dimensión $n-1$.

i) Pruebe que para todo $v \notin U$, el subespacio generado por v es suplemento de U en V. **ii)** Sea S subespacio de V no contenido en U. Pruebe que $S + U = V$ y calcule la dimensión de $S \cap U$ en función de la dimensión de S.

P2. [Polinomios]
Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo más 3 con coeficientes en $\mathbb{R}$.

a) Considere los siguientes conjuntos U, V contenidos en $\mathcal{P}_3$:

$$U = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i \in \mathcal{P}_3 \mid \sum_{i=0}^{3} a_i = 0 \wedge \sum_{i=0}^{3} (-1)^i a_i = 0 \right\}$$

$$V = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i \in \mathcal{P}_3 \mid a_0 = 2a_1 \wedge a_2 = 2a_3 \right\}$$

i) Pruebe que U y V son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_3$. Encuentre una base y determine la dimensión de los conjuntos **ii)** U y V, **iii)** $U \cap V$ y **iv)** $U + V$. **v)** Argumente si el último conjunto es o no suma directa.

b) Supóngase que $S \subseteq \mathcal{P}_3$ es subespacio vectorial y que $\mathcal{B} = \{x^2 + x + 1, x^3 + x, x^3 + 1\}$ es base de S. Encuentre un subespacio $W \subseteq \mathcal{P}_3$ y de una base de W de modo que $S \oplus W = \mathcal{P}_3$

P3. [*Flashback*]
Anteriormente se probó que $U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \right\}$ es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.

a) De una base de U y calcule su dimensión.

b) Si T es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ tal que $U \oplus T = \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, determine la dimensión de T.

c) Considere $Z = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Justifique si $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) = U \oplus Z$.

P4. [Matrices]
Sea $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de n filas y n columnas con entradas a valores en $\mathbb{R}$. Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ se define $A(V) := \{Ax \mid x \in V\}$.

a) Muestre que si $A(V)$ está bien definido entonces también es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

b) Considere U, W subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen $U \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible si y solo si $A(U)$ y $A(W)$ son suplementarios en $\mathbb{R}^n$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Caracterización de espacio vectorial]:** Sean $(V, +_V)$ un grupo abeliano, $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ un cuerpo, $*_V : \mathbb{K} \times V \to V$ ley de composición externa tal que $(\forall\,(\beta, v) \in \mathbb{K} \times V) : \beta * v \in V$. Luego $(V, +_V, *_V)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (también dicho $\mathbb{K}$-espacio vectorial) si y solo si $(\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{K})\,(\forall\,u, v \in V)$ se cumple que:
  - **i)** $(a +_{\mathbb{K}} \beta) *_V v = \alpha *_V v \; +_V \; \beta *_V v$
  - **ii)** $\alpha *_V (u +_V v) = \alpha *_V u \; +_V \; \alpha *_V v$
  - **iii)** $\alpha *_V (\beta *_V V) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) *_V v$
  - **iv)** $1_{\mathbb{K} \cdot_{\mathbb{K}}} *_V v = v$
- **[Subespacio vectorial]:** Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que U es subespacio vectorial de V si y solo si se cumple:
  - **i)** $U \neq \emptyset$
  - **ii)** $U \subseteq V$
  - **iii)** $(\forall u, v \in U) : u + v \in U$
  - **iv)** $(\forall \beta \in \mathbb{K})\,(\forall u \in U) : \beta u \in U$
- **[Intersección de subespacios vectoriales]:** Sea E un espacio vectorial definido sobre algún cuerpo. Sean U, V subespacios vectoriales de E, entonces $U \cap V$ es subespacio vectorial de E.
- **[Caracterización de subespacios vectoriales]:** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces U es subespacio vectorial de V si y solo si $(\forall u, v \in U)\,(\forall \beta \in \mathbb{K}) : u + \beta v \in U$.
- **[Independencia lineal]**: Sean $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$. Los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ son **linealmente independientes** si y solo si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0 \implies \beta_i = 0, \forall i \in [1..n]$. De lo contrario, se dirán **linealmente dependientes**.
- **[Conjunto generador]**: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ generan V si y solo si $\langle\{v_1, \cdots, v_n\}\rangle = V$, es decir, $(\forall v \in V)\,(\exists \{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}) : v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$.
- **[Base]**: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. El conjunto de vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ se dice base de V si y solo si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto linealmente independiente y genera a todo el espacio $V = \langle\{v_1, \cdots, v_n\}\rangle$.
- **[Dimensión]**: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $n \in \mathbb{N}$. Su dimensión es n (finita) ssi admite una base de cardinalidad n; en caso de que no exista una base finita, se dirá que tiene dimensión infinita. Si U es s.e.v. de V entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$. Si $\dim(U) = \dim(V)$ entonces $U = V$.
- **[Convención]**: El conjunto vacío es linealmente independiente y $\{0\}$ es el subespacio más pequeño que lo contiene, por lo que el conjunto vacío es la base del espacio vectorial $\{0\}$. Se tiene que $\dim(\{0\}) = 0$.
- **[Obtener bases]**: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
  - De un conjunto generador de V, siempre es posible extraer un subcojunto que sea base de V.
  - Si se tiene una base de tamaño n y conjunto cualquiera de tamaño k tal que $k > n$, entonces el conjunto es linealmente dependiente (pueden extraerse vectores hasta obtener una base de V).
  - Si la dimensión de V es $n < \infty$ y se tiene un conjunto linealmente independiente de n elementos, entonces dicho conjunto es base de V.
  - Si la dimensión de V es $n < \infty$ y se tiene un conjunto linealmente independiente de k elementos con $k < n$, entonces existen $n - k$ vectores que agregar al l.i. para que sea base de V.
- **[Suma de subespacios vectoriales]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces la suma de dichos subespacios vectoriales es otro subespacio vectorial de V, y se define por: $U + W := \{v \in V \mid v = u + w, u \in U \wedge w \in W\}$.
- **[Suma directa]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. $Z = U + W$ es suma directa si y solo si todo vector de $z \in Z$ se escribe de manera única como $z = u + w$ para algún $u \in U, w \in W$. En tal caso se anota $Z = U \oplus W$ y se caracteriza por satisfacer $U + W = Z$ y $U \cap W = \{0\}$. Si $Z = V$ entonces U y W se llaman **suplementarios**.
- **[Dimensión de sumas]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Entonces:
  - $V = U + W \implies \dim(V) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
  - $V = U \oplus W \implies \dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$